Euler-Mac Laurins summationsformel och Bernoulliska polynom

LARS HÖRMANDER

Lunds Universitet

Datorer gör det möjligt att genomföra räkningar som tidigare varit otänkbara, exempelvis att beräkna summan av en oändlig serie genom att helt enkelt addera ett stort antal termer. I praktiken är detta dock inte särskilt effektivt. Ett syfte med följande uppgift är att visa att matematiska metoder för att reducera räknearbetet inte blivit överflödiga trots de nya tekniska hjälpmedlen.

Uppgiften består av två delar. I den första införs Bernoullital och Bernoullipolynom som hjälpmedel för att jämföra en summa med en integral. I den andra diskuteras Fourierserier med utgångspunkt från Bernoullipolynomen. Detta ger speciellt flera möjligheter att beräkna π.

Om man vill beräkna summan av en serie som

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

med hög precision, exempelvis 8 siffrors noggrannhet, så verkar det först som om man skulle behöva räkna ut en delsumma

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}$$

med ett orimligt stort antal termer. Vi har nämligen

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n},$$

vilket medför att för godtyckliga heltal $N < M$

$$\frac{1}{N+1} - \frac{1}{M+1} < \sum_{N+1}^{M} \frac{1}{n^2} < \frac{1}{N} - \frac{1}{M}.$$

Summan $R_N = S - S_N$ av termerna efter den N:te ligger alltså mellan $1/(N+1)$ och $1/N$ så man skulle behöva summera 10^8 termer för att få tillräckligt liten rest. Närmare eftertanke visar emellertid att eftersom

$$0 < S - S_N - \frac{1}{N+1} < \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} = \frac{1}{N(N+1)}$$

så räcker det att ta $N = 10^4$, beräkna s_N och addera 1/N till resultatet. Ändå krävs 10001 termer.

1. Använd att

$$\frac{1}{n^2} - \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\Big) = \frac{1}{n^2(n^2-1)}$$

för att sänka antalet termer under 500! Kan Du hitta ytterligare förbättringar?

Om Du känner till något om numerisk integration så ser Du att man kan uppfatta exemplet ovan så, att $\sum_N^\infty 1/n^2$ approximerats med $\int_N^\infty dx/x^2 = 1/N$, först med rektangeluppskattning, sedan med trapetsuppskattning av felet. Vi skall nu ge en allmän metod som inte kräver att man i varje särskilt fall hittar på ett knep.

För att förenkla börjar vi med att undersöka $\int_0^1 f(x)\,dx$ för en funktion f som antas ha många kontinuerliga derivator. Om dessa blir allt mindre, som fallet är för $f(x) = 1/(x+n)^2$ då n är stort, så lönar det sig att integrera partiellt:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = [(x-c)f(x)]_0^1 - \int_0^1 (x-c)f'(x)\,dx$$
$$= (1-c)f(1) + cf(0) - \int_0^1 (x-c)f'(x)\,dx.$$

Vi får en symmetrisk formel genom att välja $c = \frac{1}{2}$,

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \tfrac{1}{2}(f(1) + f(0)) - \int_0^1 (x - \tfrac{1}{2}) f'(x)\,dx, \tag{1}$$

där den första termen i högerledet kallas trapetsapproximationen till integralen; den är integralen av den lineära funktion som är lika med f i 0 och 1. Man kallar

$$B_1(x) = x - \tfrac{1}{2} \tag{2}$$

för det första Bernoullipolynomet och bestämmer successivt Bernoullipolynomen $B_2(x)$, $B_3(x)$, $\dots$ så att

$$B_n'(x) = nB_{n-1}(x), \quad B_n(0) = B_n(1), \qquad n > 1. \tag{3}$$

Det andra villkoret kräver att

$$\int_0^1 B_{n-1}(x)\,dx = 0, \qquad n > 1, \tag{4}$$

vilket gäller enligt (2) då $n = 2$. Av (3) får vi $B_2(x) = x^2 - x + c$, och (4) kräver att vi väljer konstanten c så att $\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + c = 0$, alltså $c = 1/6$. Det är klart att man på ett och endast ett sätt kan fortsätta att beräkna polynomen $B_n(x)$ genom integration av det föregående polynomet enligt (3) och bestämning av integrationskonstanten enligt (4).

2. Beräkna koefficienterna i polynomen B_3, B_4, B_5, B_6.

3. Visa att

$$B_n(1 - x) = (-1)^n B_n(x), \qquad n \geq 1.$$

4. Visa att det finns en talföljd $b_0, b_1, \dots$ (de Bernoulliska talen) sådana att

$$B_n(x) = \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} b_l x^{n-l}, \qquad n \geq 1; \qquad \binom{n}{l} = \frac{n!}{l!(n-l)!};$$

och att dessa kan beräknas genom rekursionsformeln

$$\sum_{l=0}^{n-1} \binom{n}{l} b_l = 0, \qquad n \geq 2.$$

Vi har alltså $b_0 = 1, b_1 = -\frac{1}{2}$, $b_2 = \frac{1}{6}$. Beräkna $b_3, \ldots, b_6$, och visa att $b_k = 0$ om k är udda > 1.

5. Visa att i intervallet $[0, 1]$ är B_{2k+1} för $k > 1$ noll i punkterna 0, $\frac{1}{2}$, 1 och inga andra.

6. Visa att

$$B_n(2x) = 2^{n-1}(B_n(x) + B_n(x + \tfrac{1}{2})),$$

och beräkna $B_n(\frac{1}{2})$.

7. Visa att för $k \geq 1$ gäller

$$|B_{2k}(x)| \leq |b_{2k}|, \quad |B_{2k+1}(x)| \leq (2k+1)|b_{2k}|/4, \qquad \text{då } 0 \leq x \leq 1.$$

8. Visa att $B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}$ och använd det för att beräkna summan

$$\sum_{j=0}^{N} j^n$$

då n och N är positiva heltal.

Genom upprepad partialintegration i (1) får vi nu

(5)
$$\int_0^1 f(x)\,dx = (f(1) + f(0))/2 - \Big[\sum_{k=2}^{n} (-1)^k B_k(x) f^{(k-1)}(x)/k!\Big]_0^1 + (-1)^n \int_0^1 B_n(x) f^{(n)}(x)/n!\,dx.$$

Eftersom $B_k(0) = B_k(1) = b_k$ då $k \geq 2$ och $b_k = 0$ då k är udda, så får vi om vi väljer $n = 2p+1$ udda

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,dx = \tfrac{1}{2}(f(1)+f(0)) - \Big[\sum_{k=1}^{p} b_{2k} f^{(2k-1)}(x)/(2k)!\Big]_0^1 \\ - \int_0^1 B_{2p+1}(x) f^{(2p+1)}(x)/(2p+1)!\,dx.\end{aligned} \tag{5$'$}$$

Om f är en $2p+1$ gånger kontinuerligt deriverbar funktion i intervallet $N \leq x \leq M$ där N, M är heltal, så kan vi tillämpa detta på funktionerna $x \mapsto f(x+n)$ för $N \leq n < M$ och addera resultaten. De utintegrerade termerna i $N+1, \dots, M-1$ tar då ut varandra tack vare att vi i $(5)'$ har samma koefficienter i 0 och i 1. Det har vi på grund av det andra villkoret (3) som ställdes precis för att uppnå detta. Beteckna med $\overline{B}_\nu(x)$ den funktion med perioden 1 som är lika med B_ν i intervallet $[0,1]$; den är $\nu - 2$ gånger kontinuerligt deriverbar enligt andra delen av (3). Vi har då bevisat *Euler-Mac Laurins summationsformel*

$$\begin{aligned}\int_N^M f(x)\,dx = \tfrac{1}{2}(f(N)+f(M)) + \sum_{N<n<M} f(n) \\ - \Big[\sum_{k=1}^{p} b_{2k} f^{(2k-1)}(x)/(2k)!\Big]_N^M \\ - \int_N^M \overline{B}_{2p+1}(x) f^{(2p+1)}(x)/(2p+1)!\,dx.\end{aligned} \tag{6}$$

9. Använd formeln för att beräkna

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^2} \quad \text{och} \quad \sum_1^\infty \frac{1}{n^4}$$

med 8 siffrors noggrannhet utan att summera ett stort antal termer. (Beräkna summan av de $N-1$ första termerna och hälften av den

N:te exakt, samt använd (6) för att approximera resten! Experimentera med olika ganska små val av N och p för att se hur stor integralen i högerledet av (6) blir! Hur långt ner kan Du minska antalet termer som måste beräknas?)

10. Använd formeln för att skriva ett program som beräknar Riemanns ζ funktion $\zeta(s) = \sum_1^\infty n^{-s}$ med 8 siffrors noggrannhet då $1 < s \leq 6$.

Vi skall nu diskutera *Fourierserien* för den periodiska funktionen $\overline{B}_n$. De enklaste funktionerna som är periodiska med perioden 1 är de trigonometriska funktionerna $\sin(2\pi kx)$ och $\cos(2\pi kx)$, eller

$$e^{2\pi ikx} = \cos(2\pi kx) + i\sin(2\pi kx), \qquad \text{Eulers formler.}$$

Man säger att en funktion f med perioden 1 har utvecklats i Fourierserie om den framställts som en summa

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k(f) e^{2\pi ikx}, \tag{7}$$

vilket också kan skrivas i den mindre lätthanterliga formen

$$f(x) = \sum_0^\infty a_k(f)\cos(2\pi kx) + \sum_1^\infty b_k(f)\sin(2\pi kx);$$

$$a_0 = c_0, a_k = c_k + c_{-k}, b_k = i(c_k - c_{-k}).$$

I fortsättningen använder vi (7). Om (7) gäller i den starka meningen att

$$\max |f(x) - \sum_{-N}^{N} c_k(f) e^{2\pi ikx}| \to 0 \text{ då } N \to \infty,$$

så kan man multiplicera med $e^{-2\pi i\nu x}$ och integrera varje term för sig. Eftersom

$$\int_0^1 e^{-2\pi i\mu x}\,dx = \begin{cases} 0, & \text{om } \mu \neq 0 \\ 1, & \text{om } \mu = 0, \end{cases}$$

så får man genast

$$c_\nu(f) = \int_0^1 f(x)e^{-2\pi i\nu x}\,dx. \tag{8}$$

Man kallar talen som ges av (8) för Fourierkoefficienterna till f. Problemet är om (7) gäller med dessa koefficienter.

Enligt (4) har vi $c_0(\overline{B}_n) = 0$, om $n \neq 0$, och då $\nu \neq 0$ får vi med hjälp av (3)

$$\begin{aligned} c_\nu(\overline{B}_n) &= \int_0^1 B_n(x)e^{-2\pi i\nu x}\,dx = \frac{1}{2\pi i\nu}\int_0^1 B_n'(x)e^{-2\pi i\nu x}\,dx \\ &= \frac{n}{2\pi i\nu}\int_0^1 B_{n-1}(x)e^{-2\pi i\nu x}\,dx = \dots \\ &= \frac{n!}{(2\pi i\nu)^{n-1}}\int_0^1 B_1(x)e^{-2\pi i\nu x}\,dx = \frac{-n!}{(2\pi i\nu)^n}. \end{aligned}$$

Det gäller nu att visa att

$$\overline{B}_n(x) = \sum_{\nu\neq 0}\frac{-n!}{(2\pi i\nu)^n}e^{2\pi i\nu x}$$

om $n \geq 2$. Då konvergerar i varje fall serien eftersom $\sum_{\nu\neq 0}|\nu|^{-n} < 2 + 2\int_1^\infty t^{-n}\,dt < \infty$.

Låt alltså $n \geq 2$, $0 \leq y \leq 1$, och betrakta funktionen

$$f(x) = (\overline{B}_n(x) - \overline{B}_n(y))/(1 - e^{2\pi i(x-y)}), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Med lämplig definition då $x = y$ eller $x = y \pm 1$ så är f kontinuerligt deriverbar för $0 \leq x \leq 1$, så vi har

$$\begin{aligned} c_\nu(f) &= \int_0^1 f(x)e^{-2\pi i\nu x}\,dx \\ &= [f(x)e^{-2\pi i\nu x}/(-2\pi i\nu)]_0^1 + \int_0^1 f'(x)e^{-2\pi i\nu x}/(2\pi i\nu)\,dx \to 0, \end{aligned}$$

då $\nu \to \infty$. Eftersom

$$\overline{B}_n(x) = \overline{B}_n(y) + f(x) - f(x)e^{2\pi i(x-y)}, \quad 0 \le x \le 1,$$

så ger en enkel räkning

$$c_\nu(\overline{B}_n) = \begin{cases} c_\nu(f) - e^{-2\pi iy}c_{\nu-1}(f), & \text{om } \nu \neq 0, \\ \overline{B}_n(y) + c_\nu(f) - e^{-2\pi iy}c_{\nu-1}(f), & \text{om } \nu = 0. \end{cases}$$

Alltså är

$$\begin{aligned}\sum_{-N}^{N} c_\nu(\overline{B}_n)e^{2\pi i\nu y} &= \overline{B}_n(y) + \sum_{-N}^{N}(c_\nu(f)e^{2\pi i\nu y} - c_{\nu-1}(f)e^{2\pi i(\nu-1)y}) \\ &= \overline{B}_n(y) + c_N(f)e^{2\pi iNy} - c_{-N-1}(f)e^{2\pi i(\nu-1)y} \\ &\qquad \to \overline{B}_n(y), \quad N \to \infty,\end{aligned}$$

vilket bevisar att för $n \ge 2$ gäller

$$\overline{B}_n(x) = -n!\sum_{\nu\neq 0}(2\pi i\nu)^{-n}e^{2\pi i\nu x}. \tag{9}$$

Speciellt får vi då $x = 0$

$$b_n = -n!\sum_{\nu\neq 0}(2\pi i\nu)^{-n}. \tag{10}$$

11. Använd (10) och övning 9 för att beräkna π.

12. Visa att om f är en två gånger kontinuerligt deriverbar funktion med perioden 1 så gäller att

$$\tfrac{1}{2}\int_0^1 f''(x-y)B_2(y)\,dy = c_0(f) - f(x).$$

Visa med hjälp av det att (7) följer av (9) med $n = 2$.

Eftersom $\sum_{\nu\neq 0} 1/|\nu| \geq 2\int_1^\infty dt/t = \infty$ så är frågan om konvergensen av Fourierserien för $\overline{B}_1$ mera komplicerad. Delsummorna är

$$s_N(x) = -\sum_{0<|\nu|\leq N} e^{2\pi i\nu x}/(2\pi i\nu).$$

Observera att $s_N(x) = -s_N(-x) = -s_N(1-x)$, vilket speciellt ger $s_N(0) = s_N(\frac{1}{2}) = 0$. Vi kan summera derivatan som en geometrisk serie,

$$\begin{aligned} s'_N(x) &= -\sum_{0<|\nu|\leq N} e^{2\pi i\nu x} = 1 - \sum_{-N}^{N} e^{2\pi i\nu x} \\ &= 1 - \frac{e^{2\pi i(N+\frac{1}{2})x} - e^{-2\pi i(N+\frac{1}{2})x}}{e^{\pi i x} - e^{-\pi i x}} = 1 - \frac{\sin(2\pi(N+\frac{1}{2})x)}{\sin(\pi x)}. \end{aligned}$$

Eftersom $s_N(0) = 0$ får vi för $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$,

$$s_N(x) = x - \int_0^x \frac{\sin(2\pi(N+\frac{1}{2})t)}{\sin(\pi t)}\, dt.$$

Nu är $f(t) = 1/\sin(\pi t) - 1/(\pi t)$ en kontinuerligt deriverbar funktion i $[0, \frac{1}{2}]$ (visa det som övning) och vi får därför med upprepning av ett bevis ovan att om

$$e_N(x) = \int_0^x \sin(2\pi(N+\tfrac{1}{2})t) f(t)\, dt$$

så är $|e_N(x)| \leq C/(N+\frac{1}{2})$. Vidare är

$$s_N(x) + e_N(x) = x - \int_0^x \frac{\sin(2\pi(N+\frac{1}{2})t)}{\pi t}\, dt = x - G(2\pi x(N+\tfrac{1}{2}))$$

där

$$G(T) = \int_0^T \frac{\sin t}{\pi t}\, dt. \tag{11}$$

Sätter vi $x = \frac{1}{2}$ så ser vi eftersom $s_N(\frac{1}{2}) = 0$ att

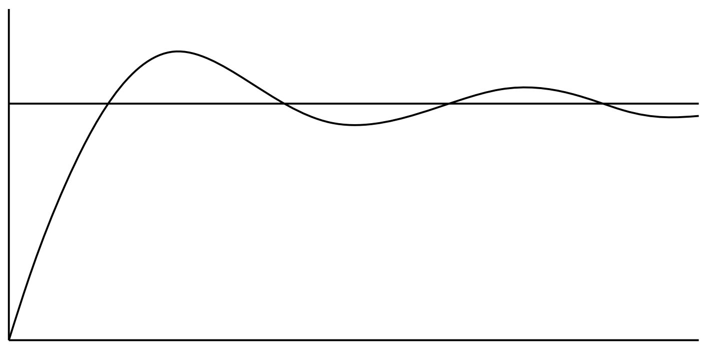
$$G(\pi(N + \tfrac{1}{2})) \to \tfrac{1}{2} \quad \text{då } N \to \infty.$$

Om $\pi N \leq T \leq \pi(N+1)$ så är

$$|G(T) - G(\pi(N + \tfrac{1}{2}))| \leq \frac{1}{\pi N} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin t|\, dt = \frac{1}{\pi N},$$

så vi kan dra slutsatsen att $G(T) \to \frac{1}{2}$ då $T \to \infty$ på godtyckligt sätt. Detta medför att $s_N(x) \to x - \frac{1}{2}$ då $N \to \infty$ och $0 < x \leq \frac{1}{2}$, alltså för alla icke heltaliga x.

13. Visa att $0 \leq G(y) \leq G(\pi)$ och beräkna $G(\pi)$ numeriskt (eventuellt med hjälp av Euler-Mac Laurins formel eller Simpsons formel)! Värdet är 0,58949 $\ldots$. Minimum av s_N ligger alltså nära $-G(\pi)$ då N är stort, fastän $\overline{B}_1 \geq -\frac{1}{2}$. Denna översvängning kallas Gibbs fenomen. Rita gärna upp några delsummor på bildskärmen för att se detta, om Du har tillgång till dator med god grafik!



Grafen för $y = G(x)$ och $y = \frac{1}{2}$, då $0 \leq x \leq 4\pi$.