Fibonaccis talföljd

Bernt Lindström

KTH, Stockholm

Leonardo av Pisa, även kallad Fibonacci, var en berömd matematiker under medeltiden. Han lärde sig aritmetik av araber i Nordafrika, introducerade det arabiska talsystemet i Europa och skrev 1202 en epokgörande lärobok i algebra *Liber Abaci*. Han är också känd som upphovsmannen till *Fibonaccis talföljd*:

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ \ldots$$

i vilken varje tal är summan av de två närmast föregående talen. Denna talföljd har många underbara egenskaper, som inte bara är talkuriosa: Fibonaccis talföljd spelade en avgörande roll när Matijasievič 1970 lyckades lösa ett berömt problem om diofantiska ekvationers lösbarhet: *Hilberts 10:e problem*.

Om man sätter $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, så gäller för det n:te talet i talföljden att

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \text{ när } n \geq 3. \tag{1}$$

Vad man framför allt bör studera är algebraiska relationer mellan Fibonaccitalen samt delbarhetsegenskaper. Man har därvid nytta av att kunna matematisk induktion och kongruensaritmetik. Boken *Talteori för alla* av Ogilvy och Anderson (Prisma, 1968) har ett kapitel om kongruensaritmetik och även ett kort kapitel om den här aktuella talföljden. (Fråga efter boken på biblioteket!)

UPPGIFT. Visa att man kan definiera $F_0,\ F_{-1},\ F_{-2}$ etc. så att man får ett *Fibonacci–tal* F_n för varje heltal n så att dessa tal uppfyller relationen (1) utan inskränkning på n.

UPPGIFT. Studera resterna modulo N av Fibonacci–talen, då $N = F_n$ $(n \geq 3)$ är ett Fibonacci–tal. När blir resten 0?

EXEMPEL. Om vi väljer $N = 3 = F_4$ blir resterna av $F_1,\ F_2,\ \ldots$:

$$1,\ 1,\ 2,\ 0,\ 2,\ 2,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 0,\ \ldots .$$

SLUTSATS.F_m är jämnt delbart med F_n när m är jämnt delbart med n. (m är ett heltal, som är positivt eller negativt.)

UPPGIFT. Skriv ned ett bevis för slutsatsen ovan! Att ett heltal m är jämnt delbart med ett annat heltal n brukar skrivas $n|m$. Slutsatsen ovan kan nu skrivas kortare: $n|m$ implicerar $F_n|F_m$.

Den största gemensamma divisorn till två heltal m och n brukar skrivas (m,n). Av det föregående inses att $F_{(m,n)}|F_m$ och $F_{(m,n)}|F_n$. Alltså gäller $F_{(m,n)}|(F_m, F_n)$. Man kan bevisa ännu mer:

SATS. $F_{(m,n)} = (F_m, F_n)$, *där* $m, n \geq 1$.

HJÄLPSATS 1. *Det finns heltal a och b sådana att* $(m,n) = am + bn$.

HJÄLPSATS 2.

$$F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_mF_{n+1},$$

$$F_{m-n} = (-1)^{n+1}(F_{m-1}F_n - F_mF_{n-1}).$$

Den senare hjälpsatsen kan visas med induktion över $n \geq 1$ när m är ett godtyckligt heltal. Det följer, att om både F_m och F_n är jämnt delbara med ett naturligt tal N, så är F_{m+n} och F_{m-n} jämnt delbara med N. Man inser sedan att alla Fibonacci–tal av formen F_{am+bn} är jämnt delbara med N. Eftersom F_m och F_n är jämnt delbara med (F_m, F_n) ser man nu, om man använder Hjälpsats 1, att $F_{(m,n)}$ är jämnt delbart med (F_m, F_n). Vi har tidigare sett att (F_m, F_n) är jämnt delbart med $F_{(m,n)}$. Alltså måste $F_{(m,n)} = (F_m, F_n)$. Satsen är visad.

Hjälpsats 1 brukar bevisas med användande av Euklides algoritm. Kanske Du kan hitta ett bevis i någon bok, t.ex. i Hans Riesels *En bok om primtal* (Studentlitteratur, 1968).

Av den bevisade satsen följer lätt följande egenskaper hos de Fibonaccis tal. De kom till användning i Matijasievič's lösning av Hilbert's 10:e problem (se Fenstads artikel!).

FÖLJDSATS 1. *F_n och F_{n+1} saknar gemensamma delare ($n \geq 1$).*

FÖLJDSATS 2. *$F_m | F_n$ om och endast om $m | n$ $\quad (m, n \geq 1)$.*

Här följer ytterligare några relationer, som Du kan försöka bevisa (de två första bevisas i boken av Ogilvy och Anderson).

$$F_{n+1}^2 = F_n F_{n+2} + (-1)^n$$

$$F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$$

$$F_1 F_2 + F_2 F_3 + \cdots + F_{2n} F_{2n+1} = F_{2n}^2, \qquad F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1},$$

$$F_1 + 2F_2 + 3F_3 + \cdots + nF_n = nF_{n+2} - F_{n+3} + 2.$$

Det finns en liten bok av N.N. Vorobyov, *The Fibonacci Numbers*, som innehåller en hel del om Fibonacci–talens delbarhetsegenskaper. Den publicerades först på ryska, men har översatts både till engelska och tyska.

Litteratur

[1] Fem festliga formler för Fibonacci–fantaster. *Elementa* 63 (1980), s 199.

[2] Fenstad, J.E., Hilberts 10. problem. *Nordisk Matematisk Tidskrift*, 19 (1971), s 5–14.

[3] Gardner, M., *Mathematical Circus, Chapter 13: Fibonacci and Lucas Numbers.* Alfred A. Knopf, New York 1979.

[4] Ogilvy, C. Stanley och Anderson, John T., *Talteori för alla.* Prisma 1968.

[5] Vorobyov, N.N., *The Fibonacci Numbers* (i serien Topics in Mathematics). Heath and Company, Boston.