Permutationer med paritet

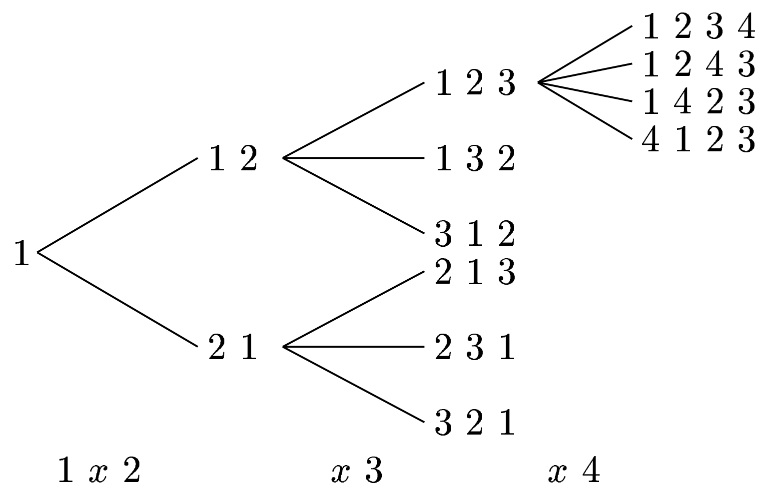
Bernt Lindström

KTH, Stockholm

Uppgift. Att studera permutationerna av talen $1, 2, \ldots, n$ och indelningen i udda och jämna permutationer ur olika aspekter. Permutationer är särskilt viktiga inom kombinatoriken, sannolikhetsläran och i algebran. I kombinatoriken betraktas en permutation som en uppräkning av talen $1, 2, \ldots, n$. I gruppteorien (en gren av algebran) studeras permutationer som avbildningar eller operationer.

1. Permutationer ur kombinatorisk synvinkel.

Problem 1. Hur många permutationer finns det av talen $1, 2, \ldots, n$? Här är en metod att generera alla permutationer:



Svar. Det finns $1 \times 2 \times 3 \cdots \times n$ permutationer av talen $1, 2, \ldots, n$.

Notation. $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$ skrivs kortare $n!$, vilket utläses n–fakultet.

Exempel. trefakultet $3! = 6$, fyrfakultet $4! = 24, \ldots$.

INVERSIONER. Varje gång ett större tal står före ett mindre talar man om en inversion.

EXEMPEL. Permutationen 3 4 1 2 innehåller 4 inversioner: 3 1, 3 2, 4 1 och 4 2.

DEFINITION. Antalet inversioner i en permutation kallas inversionstalet för permutationen. En permutation är *jämn (udda)* om inversionstalet är jämnt (resp. udda).

UPPGIFT. Bestäm inversionstalet och pariteten för några permutationer.

EXEMPEL.

Permutation	*Inversionstal*	*Paritet*
1 2 3	0	jämn
1 3 2	1	udda
3 1 2	2	jämn
2 1 3	1	udda
2 3 1	2	jämn
3 2 1	3	udda

PROBLEM. Hur många inversioner innehåller permutationen n $n-1$ $n-2$ $\ldots$ 3 2 1.

SVAR. Permutationen innehåller $n(n-1)/2$ inversioner (kan visas med induktion över $n \geq 2$).

IAKTTAGELSE. Det finns lika många jämna och udda permutationer av talen $1, 2, 3$. Gäller detta mer generellt för permutationerna av $1, 2, \ldots, n$?

UPPGIFT. Låt två tal byta plats in en permutation. Påverkas pariteten?

EXEMPEL.

Jämn paritet	*Udda paritet*
1 2 3	1 3 2
2 3 1	2 1 3
3 1 2	3 2 1

REGEL 1. När två intilliggande tal byter plats i en permutation ändras pariteten.

SLUTSATS. Av regel 1 följer att det finns lika många permutationer av de båda slagen jämna och udda.

UPPGIFT. Låt två tal "på avstånd" byta plats i permutationer. På verkas pariteten?

EXEMPEL.

Jämn paritet	*Udda paritet*
1 2 3	3 2 1
2 3 1	1 3 2
3 1 2	2 1 3

REGEL 2. När två tal byter plats i en permutation ändras pariteten.

Man kan bevisa regel 2 med hjälp av regel 1. Bevisidén illustreras av ett exempel.

EXEMPEL. Permutationen 3 4 1 2 kan överföras i permutationen 2 4 1 3 med hjälp av platsbyten av intilliggande tal på följande sätt

$$\underline{3\ 4}\ 1\ 2 \to 4\ \underline{3\ 1}\ 2 \to 4\ 1\ \underline{3\ 2} \to 4\ \underline{1\ 2}\ 3 \to \underline{4\ 2}\ 1\ 3 \to 2\ 4\ 1\ 3.$$

Understrukna tal byter plats. Regel 1 användes ett *udda* antal gånger. Pariteten ändras varje gång.

Femtonspelet. Femton brickor, som är numrerade från 1 till 15, placeras slumpmässigt inom en kvadratisk ram. Det gäller nu att återställa den naturliga ordningen genom att skjuta brickor till den tomma platsen. Det är inte alltid möjligt att återställa ordningen. Man kan visa att *permutationen* som bildas när man läser numren på vanligt sätt från vänster till höger uppifrån och ned *måste vara jämn* för att man skall kunna återställa ordningen.

Brickor i naturlig ordning:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

En (udda) permutation vars ordning inte kan återställas:

7	12	1	10
4	3	8	11
2	13	9	15
6	14	5	

Hur inser man att pariteten måste vara jämn för att ”operationen” skall lyckas?

Enklast kanske genom att ge den tomma rutan nr 16. Varje gång en bricka skjutes in på den tomma platsen byter talet 16 plats med ett annat tal och pariteten ändras enligt regel 2. När ”bricka 16” återfått sin naturliga plats (längst ned till höger) så har det skett ett *jämnt* antal platsbyten. Detta inses t.ex. om man färgar rutorna vita och svarta som på ett schackbräde. Vid varje drag flyttas ”bricka 16” från svart till vitt eller tvärtom. Begynnelsen och änden är vit; alltså ett jämnt antal drag. Permutationen måste alltså ha summa paritet som den naturliga ordningen, alltså jämn.

Bestämningen av en permutationsparitet med hjälp av inversionstalet kräver att man jämför $n(n-1)/2$ tal. Det finns en snabbare metod att bestämma pariteten kommer vi att finna.

Innan vi lämnar den kombinatoriska avdelningen skulle vi kanske nämna att det finns goda asymptotiska formler som uppskattar talet $n!$ när n är mycket stort. Sådana formler är av intresse i sannolikhetskalkylen. En elementär uppskattning, som man kan visa med hjälp av integralkalkyl, är (e är basen för de naturliga logaritmerna $2,718\ldots$)

$$(\frac{n}{e})^n < n! < (\frac{n+1}{e})^{n+1}.$$

Beviset bygger på att man uppskattar integralen $\int_1^{n+1} ln\,x\,dx$ med översummor och undersummor. Observera att integralen kan beräknas exakt med hjälp av en partialintegration.

A propos inversionstal och sannolikhetskalkyl så kan det nämnas att inversionstalen är approximativt normalfördelade. Om detta kan man läsa i Feller: Probability Theory and Its Applications (s.205).

UPPGIFT. Gör ett histogram för inversionstalen till permutationerna av talen $1, 2, \ldots, 5$.

Eulers formel $\int_0^\infty e^{-t} t^n dt = n!$ är ett annat roligt sidospår. Om man ersätter n med $x - 1$ i integralen får man en integral som konvergerar för alla reella tal $x > 0$. Den ger *gammafunktionen* $\Gamma(x)$, som man kan läsa mer om i en intressant bok av Emil Artin: The Gamma Function.

2. Permutationer ur algebraisk synvinkel.

Permutationer uppträder i algebran på flera områden. Ett exempel är linjär algebra, där definitionen av determinanter beror på indelningen i udda och jämna permutationer. Ett annat område där permutationer spelar en viktig roll är gruppteorien och teorien för polynomekvationer (s.k. algebraiska ekvationer).

EXEMPEL. Den allmänna lösningen till ekvationssystemet

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

kan skrivas $x = (b_2c_1 - b_1c_2)/(a_1b_2 - a_2b_1)$, $y = (a_1c_2 - a_2c_1)/(a_1b_2 - a_2b_1)$, när $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$. Om man skriver upp formlerna för lösning av ekvationssystemet

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

finner man i nämnarna uttrycket $a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1$. Observera permutationerna av $1, 2, 3$. Termer som svarar mot jämna permutationer har plustecken, termer som svarar mot udda permutationer har minustecken.

PERMUTATIONER SOM FUNKTIONER.

En $1-1$–avbildning av talen $\{1, 2, \ldots, n\}$ på sig själv kallas permutation. Om man skriver bildelementet under varje tal kan man skriva de 6 permutationerna av mängden $\{1, 2, 3\}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Man kan definiera produkten av två sådana permutationer f och g som funktionen $f \circ g$ (sammansättningen av funktionerna), $f \circ g(x) = f(g(x))$.

EXEMPEL. Låt $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ och $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Då blir $f \circ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

En viktig klass av permutationer är de *cykliska*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n & 1 \end{pmatrix}.$$

För denna permutation har man infört ett enklare skrivsätt:

$$(1\ 2\ \dots\ n).$$

Varje permutation kan skrivas som en produkt av cykliska permutationer.

EXEMPEL. Betrakta permutationen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vi finner att $1 \to 3 \to 5 \to 1$ (cykel) och $2 \to 4 \to 2$ (cykel). Man kan då skriva

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 5\ )(2\ 4).$$

Ordningen mellan faktorerna saknar betydelse när cyklerna saknar gemensamma element (men endast då).

Pariteten för permutationen $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$ definieras lika med pariteten för $a_1\ a_2\ \dots\ a_n$ och beror alltså på pariteten hos inversionstalet för denna följd.

ÖVNING. Visa att den cykliska permutationen $(1\ 2\ \dots\ n)$ har jämn paritet när n är udda (sic!) och udda paritet när n är jämn. Man kan visa att alla cykliska permutationer av n element har denna egenskap.

PARITETEN FÖR PRODUKTER AV PERMUTATIONER. Man kan visa att pariteten för en produkt av två permutationer är *summan* av pariteterna för de båda permutationerna. Denna regel kan generaliseras till produkter av flera permutationer. Summan av pariteter beräknas enligt reglerna: jämn + jämn = jämn, jämn + udda = udda, udda + udda = jämn.

EN SNABB METOD ATT BESTÄMMA PARITETEN FÖR PERMUTATIONER. Skriv permutationen som en produkt av cykler. Antalet cykler av jämn längd bestämmer pariteten. Om detta antal är jämnt är pariteten jämn, om det är udda blir pariteten udda.

Denna regel är en följd av föregående sats om pariteten för produkter och övningen strax före.

EXEMPEL. Låt oss använda denna metod för att bestämma pariteten i exemplet från avsnittet om femtonspelet. Permutationen är

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & 14 & 15 \\ 7 & 12 & 1 & \dots & 14 & 6 \end{pmatrix} = (1\ 7\ 8\ 11\ 9\ 2\ 12\ 15\ 5\ 4\ 10\ 13\ 6\ 3)(14).$$

Vi får alltså en cykel av jämn längd (cykeln (14) innehåller bara ett tal och behöver inte skrivas ut, om man inte vill). Permutationen är därför udda.

Litteratur

[1] Lindström, B., Perspektiv på permutationer och paritet. *Elementa* 59 (1976), s 81–83.

[2] Nagell, T., *Lärobok i algebra.* Almqvist & Wiksell, Uppsala 1949.