Volymer av n–dimensionella klot

Mikael Passare

Stockholms universitet

Ett klot med radien r är mängden av punkter vars avstånd till en given punkt (medelpunkten) är högst r. Låt oss skriva $B^3(r)$ för det klot i (x, y, z)-rummet som har sin medelpunkt i origo (det vill säga $(0, 0, 0)$) och vars radie är r. (Bokstaven B står för *boule* (*fr*) eller *ball* (*eng*) och trean betecknar dimensionen.)

Uppgift 1. *Bevisa att*

$$B^3(r) = \{J(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\}.$$

Ledtråd. Anta att $(x, y, z) \in B^3(r)$ och använd Pythagoras sats, först på triangeln med hörn i $(0, 0, 0)$, $(x, 0, 0)$ och $(x, y, 0)$, sedan på triangeln med hörn i $(0, 0, 0)$, $(x, y, 0)$ och (x, y, z).

Låt nu $B^2(r)$ vara cirkelskivan i (x, y)-planet som har sin medelpunkt i origo (det vill säga $(0, 0)$) och vars radie är r. Då kan vi skriva

$$B^2(r) = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq r^2\}.$$

Uppgift 2. *Vad blir* $B^1(r)$*?*

Vi ska också studera klot i högre dimensioner och börjar med det fyrdimensionella klotet $B^4(r)$, som har sin medelpunkt i origo (det vill säga $(0, 0, 0, 0)$) och vars radie är r.

Definition.

$$B^4(r) = \{(x, y, z, w); x^2 + y^2 + z^2 + w^2 \leq r^2\}.$$

UPPGIFT 3. *Ge en definition av $B^n(r)$.*

FÖRSLAG.Eftersom alfabetet är så kort och för att få ett enhetligt skrivsätt är det praktiskt att skriva x_1-rummet istället för x-axeln, (x_1, x_2)-rummet istället för (x, y)-planet och (x_1, x_2, x_3)-rummet istället för (x, y, z)-rummet. Det n-dimensionella rummet kallar vi då $(x_1, x_2, ..., x_n)$-rummet.

Nu inför vi beteckningen $\operatorname{Vol} B^3(r)$ för volymen av $B^3(r)$, det vill säga

$$\operatorname{Vol} B^3(r) = \frac{4\pi r^3}{3}.$$

Om vi låter tvådimensionell volym betyda area och endimensionell volym betyda längd så får vi också

$$\operatorname{Vol} B^2(r) = \pi r^2$$

och

$$\operatorname{Vol} B^1(r) = 2r.$$

För att kunna gå vidare och hitta en formel för $\operatorname{Vol} B^n(r)$ måste vi först tänka efter vad vi ska mena med volymen av en mängd i $(x_1, x_2, ..., x_n)$-rummet.

Hur definierar man egentligen vanlig area? Jo, först bestämmer man att en kvadrat med sidan s ska ha arean s^2 och att arean hos en union av disjunkta kvadrater ska vara summan av deras respektive areor. Arean av andra mängder får man sedan genom att approximera dessa med unioner av kvadrater.

UPPGIFT 4. *Låt (x_1, x_2)-rummet vara indelat i ett fint rutnät där varje liten kvadrat har sidan s. Skriv ett datorprogram som approximerar*

$$Vol B^2(1) = \pi$$

genom att lägga samman areorna hos alla små kvadrater som åtminstone delvis är innehållna i cirkelskivan.

FÖRSLAG.För att få en hygglig approximation bör s inte vara större än $0,0001$. Försök gärna förbättra approximationen, till exempel genom att bara ta med hälften av de kvadrater som inte ligger helt innanför cirkeln.

Vanlig tredimensionell volym definieras på liknande sätt genom att man först stipulerar att en kub med sidan s ska ha volymen s^3 och sedan approximerar man med unioner av kuber.

En typisk n-dimensionell kub med sidan s är

$$\{(x_1, x_2, ..., x_n); a_1 \leq x_1 \leq a_1 + s,$$
$$a_2 \leq x_2 \leq a_2 + s, ..., a_n \leq x_n \leq a_n + s\},$$

och vi sätter dess volym (som naturligtvis mäts i m^n om s uttrycks i meter) till s^n. Volymen av andra n-dimensionella mängder som till exempel $B^n(r)$ definierar vi sedan genom approximation som tidigare.

UPPGIFT 5. *Bevisa att om en n-dimensionell mängd förstoras med skalfaktorn k så multipliceras dess volym med k^n.*

LEDTRÅD. Det räcker att göra det för kuber, sedan approximerar man ju.

Nu ser vi att för att finna $\operatorname{Vol} B^n(r)$ så räcker det att räkna ut $\operatorname{Vol} B^n$ (vi skriver bara B^n för enhetsklotet, istället för $B^n(1)$) och sedan använda sambandet

$$\operatorname{Vol} B^n(r) = \operatorname{Vol} B^n \cdot r^n.$$

Innan vi på allvar tar itu med de högre dimensionerna ska vi beräkna $\operatorname{Vol} B^3$. (Vi vet förstås redan att svaret är $4\pi/3$ men nu ska vi *bevisa* detta.) Ett sätt vore naturligtvis att approximera med kuber direkt och göra en tredimensionell version av Uppgift 4, men man kan också approximera med andra mängder vars volym redan beräknats, exempelvis cylindrar.

UPPGIFT 6. *Bevisa att en cirkulär cylinder med radien r och höjden h har volymen $\pi r^2 h$.*

LEDTRÅD. Arean hos basytan, alltså cirkelskivan, fick vi ju fram genom approximation med små kvadrater. Visa att rätblocket med en sådan kvadrat som bas och med höjden h har volymen s^2h. (Använd en stapel av $\approx h/s$ stycken kuber med sidan s.)

Vi delar in intervallet $[-1,1]$ (det vill säga B^1) i $2N$ intervall av längd $1/N$. En typisk ändpunkt blir alltså k/N för något k mellan $-N$ och N. Om nu $x_1 = k/N$ så visar Pythagoras sats att $(x_1, x_2, x_3) \in B^3$ precis om $x_2^2 + x_3^2 \leq 1 - (k/N)^2$. För stora värden på N får vi en god approximation av $\operatorname{Vol} B^3$ genom att ta summan av volymerna hos cylindrarna med höjd $1/N$ och radie $\sqrt{1-(k/N)^2}$ då k går från $-(N-1)$ till $N-1$. (Vi skivar klotet i tunna skivor och approximerar varje skiva med en något större cylinder - rita en figur!) Om vi slår samman de båda identiska cylindrar som hör till $\pm k$ till en enda cylinder med höjden $2/N$ så kan vi skriva

$$\begin{aligned}
\operatorname{Vol} B^3 &= \lim_{N\to\infty} \big(\pi(1-(\frac{0}{N})^2)\frac{2}{N} + \pi(1-(\frac{1}{N})^2)\frac{2}{N} + \\
&\quad ... + \pi(1-(\frac{N-1}{N})^2)\frac{2}{N}\big) \\
&= \lim_{N\to\infty} \pi \sum_{k=0}^{N-1} \big(1-(\frac{k}{N})^2\big)\frac{2}{N} \\
&= 2\pi(1 - \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N-1} (\frac{k}{N})^2 \frac{1}{N}).
\end{aligned}$$

UPPGIFT 7A). *Bevisa att*

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N-1} (\frac{k}{N})^n \frac{1}{N} J = \frac{1}{n+1}.$$

LEDTRÅD. Gränsvärdet är $\int_0^1 x^n\,dx$, enligt definitionen av integralen.

UPPGIFT 7B). *Bevisa att*

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N-1} (\frac{k}{N})^2 \frac{1}{N^m} = 0, \quad om \quad m > 1.$$

LEDTRÅD. Gränsvärdet kan skrivas

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N-1} (\frac{k}{N})^2 \frac{1}{N} \cdot \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^{m-1}}.$$

Således har vi

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N-1} (\frac{k}{N})^2 \frac{1}{N} = \frac{1}{3}$$

och följaktligen

$$\mathrm{Vol}\, B^3 = 2\pi(1 - \frac{1}{3}) = \frac{4\pi}{3},$$

vilket ju stämmer väl med vad vi redan visste.

Nu är vi mogna att ta språnget in i det fyrdimensionella rummet. Vi ska beräkna $\mathrm{Vol}\, B^4$ helt i analogi med hur vi nyss fann $\mathrm{Vol}\, B^3$. Vi börjar med att dela in enhetsskivan B^2 i N stycken ringar genom att rita upp koncentriska cirklar med radie k/N, där k går från 0 till $N-1$. Om nu (x_1, x_2) ligger på en sådan cirkel, det vill säga

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \frac{k}{N},$$

så ser vi att $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in B^4$ precis om

$$x_3^2 + x_4^2 \leq 1 - (\frac{k}{N})^2.$$

Vi approximerar $\operatorname{Vol} B^4$ med summan av volymerna hos *cylindrar* med samma basarea som tidigare, alltså

$$\pi\big(1 - (\frac{k}{N})^2\big),$$

men nu med *höjdarean*

$$\pi\big((\frac{k+1}{N})^2 - (\frac{k}{N})^2\big),$$

det vill säga arean hos en typisk ring i vår indelning av B^2. En stunds eftertanke visar att detta exakt motsvarar vad vi gjorde tidigare, men då hade vi en indelning av B^1 istället.

UPPGIFT 8. *Motivera varför den fyrdimensionella volymen av cylindern ovan måste vara basarean gånger höjdarean, alltså*

$$\pi\big(1 - (\frac{k}{N})^2\big) \cdot \pi\big((\frac{k+1}{N})^2 - (\frac{k}{N})^2\big).$$

LEDTRÅD. Minns att vi definierade fyrdimensionell volym via approximation med fyrdimensionella kuber och jämför sedan med Uppgift 6.

Vi har alltså (i perfekt analogi med det tredimensionella fallet)

$$\operatorname{Vol} B^4 = \lim_{N \to \infty} \sum_{k=0}^{N-1} \pi\big(1 - (\frac{k}{N})^2\big)\pi\big((\frac{k+1}{N})^2 - (\frac{k}{N})^2\big).$$

Men

$$(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$$

så

$$(\frac{k+1}{N})^2 - (\frac{k}{N})^2 = \frac{2k+1}{N^2}$$

och det följer att

$$\begin{aligned}\operatorname{Vol} B^4 &= \pi^2\big(1 - \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{k^2}{N^2} \cdot \frac{2k+1}{N^2}\big) \\ &= \pi^2\big(1 - \lim_{N\to\infty} 2 \sum_{k=0}^{N-1} (\frac{k}{N})^3 \frac{1}{N} - \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N-1} (\frac{k}{N})^2 \frac{1}{N^2}\big).\end{aligned}$$

Enligt Uppgift 7 är dessa båda sista gränsvärden lika med $2 \cdot \frac{1}{4}$ respektive 0, så vi får

$$\operatorname{Vol} B^4 = \pi^2(1 - \frac{1}{2} - 0) = \frac{\pi^2}{2}.$$

Mera allmänt har således $B^4(r)$ volymen $\pi^2 r^4/2$.

UPPGIFT 9. *Bevisa formeln*

$$\mathit{Vol}\, B^n = \frac{2\pi}{n} \cdot \ \mathit{Vol}\, B^{n-2}$$

för varje $n \geq 3$.

LEDTRÅD. Dela först in B^{n-2} i N stycken skal genom att införa koncentriska klot med radie k/N, $0 \leq k \leq N-1$. Approximera som förut $\operatorname{Vol} B^n$ med summan av volymerna hos *cylindrarna* med basarea

$$\pi\big(1 - (\frac{k}{N})^2\big)$$

och *höjdvolym*

$$\operatorname{Vol} B^{n-2} \cdot \big((\frac{k+1}{N})^{n-2} - (\frac{k}{N})^{n-2}\big).$$

Dessa *cylindrars* volym ges som vanligt av basarean gånger *höjdvolymen.* Använd också det faktum att

$$(k+1)^{n-2} = k^{n-2} + (n-2)k^{n-3} + \text{lägre \ potenser av } k.$$

Nu är det lätt att räkna ut $\operatorname{Vol} B^n$:
För jämnt n, säg $n = 2m$, får vi

$$\begin{aligned}\operatorname{Vol} B^{2m} &= \frac{\pi}{m} \cdot \operatorname{Vol} B^{2(m-1)} = \frac{\pi^2}{m(m-1)} \cdot \operatorname{Vol} B^{2(m-2)} = \ldots \\ &= \frac{\pi^{m-1}}{m!} \cdot \operatorname{Vol} B^2 = \frac{\pi^m}{m!}.\end{aligned}$$

För udda n, säg $n = 2m-1$, blir formeln inte fullt lika elegant. Vi får

$$\begin{aligned}\operatorname{Vol} B^{2m-1} &= \frac{2\pi}{2m-1} \cdot \operatorname{Vol} B^{2m-3} = \ldots \\ &= \frac{(2\pi)^{m-1}}{(2m-1)(2m-3)\cdots 3} \cdot \operatorname{Vol} B^1 \\ &= \frac{2^m \pi^{m-1}}{1 \cdot 3 \cdots (2m-3)(2m-1)}.\end{aligned}$$

Vi ska nu se att genom att införa beteckningen $x!$ också för andra tal än heltal, exempelvis för $x = 1/2$, så kan man knyta ihop formlerna för det jämna och det udda fallet till en enda formel. Låt oss diskutera hur en sådan utvidgning av fakultetsfunktionen kan göras. Ett första naturligt krav är ju att sambandet

$$x! = (x-1)! \cdot x$$

ska fortfara att gälla även för x som inte är heltal. Men detta räcker förstås inte - det finns massor av funktioner som uppfyller detta. Vi kan ju definiera $x!$ helt efter behag i intervallet mellan 0 och 1 och sedan använda den rekursiva formeln för att få en funktion för alla positiva x.

UPPGIFT 10. *Låt p och q vara två heltal ≥ 0 sådana att $p < q$. Skriv upp ekvationen (på formen $y = ax+b$) för linjen som förbinder punkterna $(p, \log p!)$ och $(q, \log q!)$. Visa sedan att för varje heltal n mellan p och q så ligger punkten $(n, \log n!)$ under linjen, det vill säga*

$$\log n! \leq an + b.$$

LEDTRÅD. Anta först att $q = p + 1$. Då räcker det att kontrollera de bägge fallen $n = p$ och $n = q$. Bevisa därefter att om q ersätts med $q + 1$ så får man en brantare linje. Kom ihåg att

$$\log(q+1)! = \log q! + \log(q+1),$$

och rita en figur.

DEFINITION. *En funktion f kallas konvex om punkten $(x, f(x))$ ligger under linjen genom $(p, f(p))$ och $(q, f(q))$ för alla tal (ej nödvändigtvis heltal) sådana att $p \leq x \leq q$. (Grafen buktar med andra ord nedåt.)*

Ett andra naturligt villkor är alltså att $\log x!$ ska vara en konvex funktion. Märkvärdigt nog bestämmer detta, tillsammans med den rekursiva formeln ovan, $x!$ entydigt, och vi kan nu beräkna vad till exempel $(1/2)!$ måste vara.

Först observerar vi att för $k = 1, 2, 3, \ldots$ så ger oss konvexiteten olikheterna

$$\log(k - \frac{1}{2})! \leq \frac{1}{2}\big(\log(k-1)! + \log k!\big)$$

och

$$\log k! \leq \frac{1}{2}\big(\log(k - \frac{1}{2})! + \log(k + \frac{1}{2})!\big),$$

det vill säga

$$(k - \frac{1}{2})!^2 \leq (k-1)!k! \qquad \text{och} \qquad k!^2 \leq (k - \frac{1}{2})!(k + \frac{1}{2})!.$$

Eftersom nu

$$(k-\frac{1}{2})! = (\frac{1}{2})!\frac{3}{2}\frac{5}{2}\cdots\frac{(2k-1)}{2}$$

så får vi

$$\left(\frac{2^{k-1}k!}{3\cdot 5\cdots(2k-1)}\right)^2\Big/(k+\frac{1}{2}) \le (\frac{1}{2})!^2 \le \left(\frac{2^{k-1}k!}{3\cdot 5\cdots(2k-1)}\right)^2\Big/k.$$

Detta kan också skrivas

$$(1+1)^2(1+\frac{1}{3})^2\cdots(1+\frac{1}{(2k-1)})^2/(k+\frac{1}{2}) \le 4(\frac{1}{2})!^2$$
$$\le (1+1)^2(1+\frac{1}{3})^2\cdots(1+\frac{1}{(2k-1)})^2/k.$$

UPPGIFT 11. *Skriv ett datorprogram som räknar ut höger- och vänsterledet ovan för stora värden på k.*

Man drar slutsatsen att det måste gälla att

$$4(\frac{1}{2})!^2 = \pi,$$

det vill säga

$$(\frac{1}{2})! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

UPPGIFT 12. *Visa att det n-dimensionella klotets volym kan skrivas*

$$Vol B^n = 2^n(\frac{1}{2})!^n/(\frac{n}{2})!.$$

LEDTRÅD. Eftersom vi vet vad $(1/2)!$ är så känner vi också $(n/2)!$ för varje n.

Till sist kan nämnas att man kan generalisera kloten ytterligare genom att för varje positivt tal p definiera

$$B_p^n(r) = \{(x_1, x_2, ..., x_n); |x_1|^p + |x_2|^p + ... + |x_n|^p \le r^p\}.$$

Observera att $B_2^n(r) = B^n(r)$, alltså det vanliga runda klotet.

Då får man formeln

$$\mathrm{Vol}\, B_p^n = 2^n (\frac{1}{p})!^n / (\frac{n}{p})!$$

för det n-dimensionella p-klotet.

UPPGIFT 13. *Rita upp B_p^2 för några olika värden på p. Vad bör B_∞^2 vara?*

UPPGIFT 14. *Kontrollera giltigheten hos formeln ovan för $\mathrm{Vol}\, B_p^n$ i så många fall som möjligt.*

Lycka till!