

Gör Din egen kurvkatalog

HANS RIESEL

KTH

Krav på utrustning. För denna uppgift måste du ha tillgång till en grafisk dataterminal, så att Du kan rita kurvor på dataskärmen. Du behöver inte ha tillgång till färggrafik. Dessutom måste Du kunna rita ut kurvorna på papper, antingen med en särskilt kurvskrivare, eller med en laserskrivare eller en mekanisk punktmatrisskrivare med hygglig upplösning. — Dessutom bör Du ha tillgång till programvara, som underlättar att rita kurvor på skärmen och sedan matar ut dem på papper (såvida Du inte vill göra sådana program själv).

Allmänt om kurvritning. När man har en kurva definierad genom någon geometrisk egenskap, måste denna först kläs i lämpliga formler, d.v.s. samband mellan koordinaterna för punkterna på kurvan. Antingen arbetar man i rätvinkliga koordinater (x, y) eller i polära koordinater (r, v) . Man kan också arbeta i s.k. parameterform, där x och y (eller r och v) båda är givna som funktioner av en hjälpvariabel t : $x = x(t)$, $y = y(t)$ respektive $r = r(t)$, $v = v(t)$. I samtliga fall måste man *begränsa området* i vilket man önskar få kurvan ritad. Vilken begränsning man väljer beror på hur kurvan ser ut. Ritar man t.ex. olika avsnitt av parabeln $y = x^2$, ser figurerna mycket olika ut, om man väljer $-1 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ eller om man väljer $-10^6 \leq x \leq 10^6$, $0 \leq y \leq 10^6$. (Observera, att man bör välja intervall av jämförbar storlek för x och y , annars blir skalan konstig. Ganska vanligt hos program för kurvritning är, att programmet undersöker $x_{\max} - x_{\min}$ och $y_{\max} - y_{\min}$ och självt väljer skalan på x - och y -axlarna, så att kurvan fyller ut hela papperet. Denna teknik

har emellertid den nackdelen, att t.ex. alla ellipser ritas ut som cirklar, oavsett hur runda eller avlånga de är. Det är därför, som man i nyss nämnda parabel låter x ligga mellan -10^6 och 10^6 , trots att alla x -värden som används, bara kommer att ligga mellan -10^3 och 10^3 .)

Ritning av en kurva. För varje kurva skall Du göra följande: Programmera in formlerna som ger kurvan. Hur detta skall göras beror på, hur det allmänna program för kurvritning, som Du har tillgång till är uppbyggt. Antagligen får Du skriva ett par funktioner i Pascal, som beräknar x - och y -koordinaterna för parametervärdet t , och sedan lägga in dessa i kurvritningsprogrammet. Sedan skall Du köra programmet med utmatning på dataskärmen, och kontrollera att allting "ser bra ut", d.v.s. att formlerna är rätt inprogrammerade och verkar ge riktiga värden. När detta är klart kör Du ut kurvan på papper med lämplig text, nämligen kurvans namn (om den har något) och dess ekvation (om Du har möjlighet att mata ut formler).

Kurvorna. Följande kurvor är lämpliga att låta ingå i kurvkatalogen. Har Du andra kurvor, som Du vill ta med, går det naturligtvis bra.

Polynom

$$y = \frac{(x^2 - 1)(x^2 - 4)(x^2 - 9)}{36}, \quad -3.2 \leq x \leq 3.2.$$

Ellips

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1, \quad \text{eller}$$

$$\begin{cases} x = 4 \cos t \\ y = 2 \sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Hyperbel

$$\frac{x^2}{4} - y^2 = 1, \quad \text{eller}$$

$$\begin{cases} x = \pm 2 \cosh t \\ y = \sinh t, \end{cases} \quad -1 \leq t \leq 1.$$

Superellips

$$\left(\frac{|x|}{3}\right)^{2.5} + \left(\frac{|y|}{2}\right)^{2.5} = 1, \quad \text{eller}$$

$$\begin{cases} x = 3 \operatorname{sign}(\cos t) |\cos t|^{0.8} \\ y = 2 \operatorname{sign}(\sin t) |\sin t|^{0.8}, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Tredjegradskurva

$$y^2 = x^3 + x^2, \quad \text{eller}$$

$$\begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = t(t^2 - 1), \end{cases} \quad -1.6 \leq t \leq 1.6.$$

Cartesii blad

$$x^3 + y^3 = 3xy, \quad \text{eller}$$

$$\begin{cases} x = \frac{3t^2(1-t)}{t^3 + (1-t)^3} \\ y = \frac{3t(1-t)^2}{t^3 + (1-t)^3}, \end{cases} \quad -2 \leq t \leq 3.$$

Konkoid

$$r = \frac{1}{\sin v} + 2, \quad \begin{cases} 0.164 \leq v \leq 2.976 \\ 3.24 \leq v \leq 6.18. \end{cases}$$

Kissoid

$$x(x^2 + y^2) = 2y^2, \quad \text{eller}$$

$$\begin{cases} x = \frac{2t^2}{1+t^2} \\ y = \frac{2t^3}{1+t^2} \end{cases} \quad -3 \leq t \leq 3.$$

Pascals snäcka

$$(x^2 + y^2 - 2x)^2 = x^2 + y^2, \quad \text{eller}$$

$$\begin{cases} x = \cos t(2 \cos t + 1) \\ y = \sin t(2 \cos t + 1), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Kedjelinje

$$y = 0.4 \cosh x, \quad -3 \leq x \leq 3.$$

Släpkurva

$$x = 3 \ln \frac{3 + \sqrt{9 - y^2}}{y} - \sqrt{9 - y^2}, \quad 0.1 \leq y \leq 3.$$

Astroid

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1, \quad \text{eller}$$

$$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Booths lemniskata

$$(x^2 + y^2)^2 = 4x^2 + y^2, \quad \text{eller}$$

$$\begin{cases} x = \frac{2 \cos t}{\cos^2 t + 4 \sin^2 t} \\ y = \frac{4 \sin t}{\cos^2 t + 4 \sin^2 t}, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Bernoullis lemniskata

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2, \quad \text{eller}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t} \\ y = \frac{0.5 \sin 2t}{1 + \cos^2 t}, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Hypocykloid med 5 spetsar

$$\begin{cases} x = 4 \cos t + \cos 4t \\ y = 4 \sin t - \sin 4t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Epicykloid med 5 spetsar

$$\begin{cases} x = 6 \cos t - \cos 6t \\ y = 6 \sin t - \sin 6t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Cykloid

$$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t, \end{cases} \quad -2\pi \leq t \leq 2\pi.$$

Rullkurva

$$\begin{cases} x = 6 \cos t - 1.6 \cos 6t \\ y = 6 \sin t - 1.6 \sin 6t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Cirkel i polära koordinater

$$r = 2 \cos v, \quad -\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}.$$

Ellips i polära koordinater

$$r = \frac{2}{1 - 0.5 \cos v}, \quad 0 \leq v \leq 2\pi.$$

Hyperbel i polära koordinater

$$r = \frac{2}{1 - 2 \cos v}, \quad 1.3 \leq v \leq 5.$$

Kardioid

$$r = 1 - \cos v, \quad 0 \leq v \leq 2\pi.$$

Epicykloid med 15 spetsar

$$\begin{cases} x = 16 \cos t - \cos 16t \\ y = 16 \sin t - \sin 16t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Rosenkurva

$$r = \sin 5v, \quad 0 \leq v \leq 2\pi.$$

Arkimedes' spiral

$$r = 0.2v, \quad 0 \leq v \leq 20.$$

Logaritmisk spiral

$$r = e^{0.1v}, \quad -20 \leq v \leq 20.$$

Cirkelevolvent

$$\begin{cases} x = \cos t + t \sin t \\ y = \sin t - t \cos t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 10.$$

Cirkelevolvent

$$\begin{cases} x = \cos t + t \sin t \\ y = \sin t - t \cos t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 500.$$

Periodisk funktion

$$y = 10 \sin \frac{x}{2} + 5 \sin \frac{x}{3}, \quad 0 \leq x \leq 300.$$

Nästan periodisk funktion

$$y = 10 \sin \frac{x}{2} + 5 \sin \frac{x}{\sqrt{8}}, \quad 0 \leq x \leq 300.$$