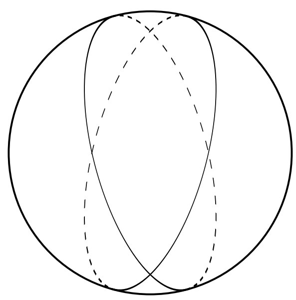
# Kurvlängd och geometri på en sfärisk yta

PETER SJÖGREN

Göteborgs Universitet

**1. Inledning.** Geometrin på en sfärisk yta liknar planets geometri, med flera intressanta skillnader. Som vi skall se nedan, är kortaste vägen på sfären mellan två givna punkter en storcirkelbåge. (En storcirkel är skärningen mellan sfären och ett plan genom medelpunkten.) Därför är det naturligt att betrakta storcirklarna som sfärens motsvarighet till de räta linjerna i planet. Många begrepp från planets geometri går då att överföra till sfären. Till exempel kan storcirkelbågar bilda trianglar, som har väldefinierade vinklar i hörnen. Vi kommer att se att vinkelsumman i en sådan triangel alltid blir större än två räta. Cirklar finns också på sfären, men sambandet mellan radie och omkrets är inte som i planet.

Genom två punkter på sfären kan man alltid dra en storcirkel. Den är entydigt bestämd utom då punkterna är antipoder. En viktig skillnad mellan sfären och planet är att två storcirklar alltid skär varandra. Någon motsvarighet till parallella linjer finns alltså inte på sfären. Två olika storcirklar delar in sfären i fyra områden, se fig. 1. Varje sådant



Figur 1

område begränsas av bara två storcirkelbågar - det är alltså en tvåhörning eller *biangel.*

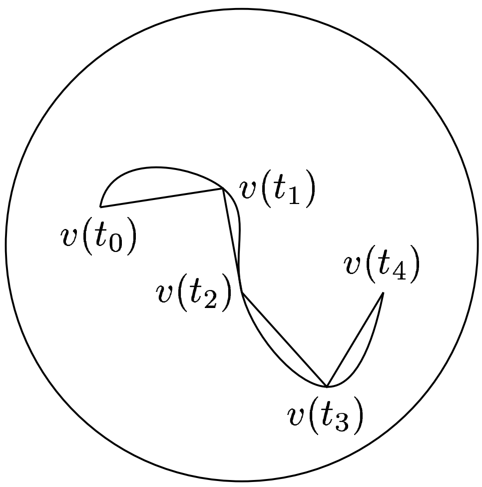
Den här uppgiften går först ut på att definiera kurvlängd och verifiera att de kortaste vägarna på sfären är storcirkelbågar. Därefter undersöker vi cirklar, tvåhörningar och trianglar på sfären.

**2. Definition av kurvlängd.** Vi väljer sfärens radie som längdenhet, och låter $S$ beteckna en sfärisk yta med radie 1 i det tredimensionella rummet. För att kunna jämföra längden av storcirkelbågar och andra kurvor, måste man först definiera kurvlängd. Vi föredrar att tala om vägar. En väg $v$ är en kontinuerlig funktion $v(t)$, $a \leq t \leq b$, med värden i $S$. Här är $a$ och $b$ reella tal med $a < b$. Det bör påpekas att nedanstående definition av längd fungerar lika bra om $v$ har värden i det tredimensionella rummet eller planet. Låt

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

definiera en indelning av $[a, b]$ i $n$ små intervall $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \ldots, n$. Vi skiljer inte på en punkt $v(t)$ och den tredimensionella vektorn till $v(t)$ från sfärens medelpunkt. Då kan vi skriva det rätlinjiga avståndet mellan punkterna $v(t_{i-1})$ och $v(t_i)$ som $|v(t_i) - v(t_{i-1})|$, längden av vektordifferensen mellan $v(t_i)$ och $v(t_{i-1})$. Summan

$$\sum = |v(t_1) - v(t_0)| + |v(t_2) - v(t_1)| + \cdots + |v(t_n) - v(t_{n-1})|$$



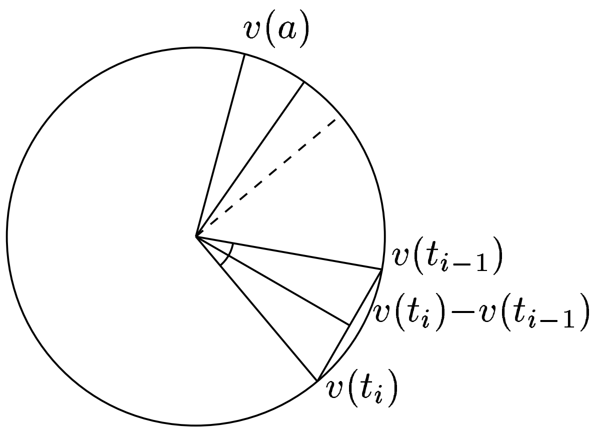

Figur 2

är sammanlagda längden av en följd av kordor till vägen. Detta visas i fig.2. Då indelningen görs fin, dvs alla kordorna görs korta, bör $\sum$ approximera väglängden vi är ute efter. Man säger att $v$ har längden $L \geq 0$ om $\sum$ närmar sig $L$ då indelningen blir fin. Mera precis skall man för varje godtyckligt litet tal $\varepsilon > 0$ ha $|\sum -L| < \varepsilon$ så snart indelningen är tillräckligt fin. Med "tillräckligt fin" menar vi här att alla skillnaderna $t_i - t_{i-1}$ skall vara mindre än något tal $\delta > 0$, som beror av $\varepsilon$. Man säger att längden är oändlig och skriver $L = \infty$, om på samma sätt för varje godtyckligt stort $M > 0$ man har $L > M$ så snart indelningen är tillräckligt fin.

[Man kan visa att ett av dessa båda fall alltid inträffar, så att $L = \lim \sum$ alltid existerar, ändlig eller oändlig: Låt $t_0, t_1, \ldots, t_n$ vara en indelning med summan $\sum$. Om $t'_0, t'_1, \ldots, t'_m$ är en förfining av den, dvs $m \geq n$ och varje $t_i$ finns med bland $t'_0, t'_1, \ldots, t'_m$, så ger $t'_0, t'_1, \ldots, t'_m$ en summa $\sum' \geq \sum$. Om nu i stället $t'_0, t'_1, \ldots, t'_m$ antas mycket fin, måste det mycket nära varje $v(t_i)$ finnas en punkt $v(t'_j)$. Därför ser man att $\sum'$ inte kan vara nämnvärt mindre än $\sum$, i följande precisa mening: Hur litet talet $\varepsilon > 0$ än är, blir $\sum' > \sum -\varepsilon$ bara $t'_0, t'_1, \ldots, t'_m$ är tillräckligt fin. Härav följer nu att det ena eller andra fallet inträffar beroende på om $\sum$ kan ta godtyckligt stora värden eller inte.]

**3. Storcirkelbågar.** Som exempel beräknar vi längden av en storcirkelbåge. En storcirkelbåge kan göras till en väg $v(t)$, $a \leq t \leq b$, på så sätt att centrumvinkeln mellan $v(t)$ och startpunkten $v(a)$ är $t$ radianer för alla $t \in [a, b]$. Med centrumvinkeln menar vi vinkeln mellan radierna genom två punkter på $S$. Då väntar vi oss att längden blir $L = b - a$. Vägen och sfärens medelpunkt ligger i ett plan. Figur 3 visar detta plan.

Figur 3




ÖVNING 1. Visa att

$$|v(t_i) - v(t_{i-1})| = 2\sin(t_i - t_{i-1})/2,$$

lämpligen genom att dra bisektrisen mellan radierna till $v(t_{i-1})$ och $v(t_i)$.

ÖVNING 2. Verifiera att $\sin\alpha \leq \alpha$ för alla $\alpha \geq 0$, och att om $0 < c < 1$ så är $\sin\alpha \geq c\alpha$ för alla tillräckligt små $\alpha \geq 0$. Ledning: Man kan göra detta geometriskt. Ett annat sätt är att skriva sinusfunktionen som integralen av sin derivata cosinus,

$$\sin\alpha = \int_0^\alpha \cos t\,dt.$$

För att uppskatta integralen uppåt och nedåt kan man utnyttja dels att $\cos t \leq 1$ för alla $t$, dels att $\cos 0 = 1$ så att $\cos t \geq c$ då $t$ är nära 0.

Om man nu kombinerar övning 1 med den första olikheten i övning 2 och summerar, får man

$$\sum \leq (t_1 - t_0) + (t_2 - t_1) + \cdots + (t_n - t_{n-1}) = b - a.$$

Den andra olikheten i övning 2 ger på samma sätt för varje $c < 1$ att

$$\sum \geq c(t_1 - t_0 + t_2 - t_1 + \cdots + t_n - t_{n-1}) = c(b - a),$$

om indelningen är tillräckligt fin. Alltså är $L = b - a$.

SATS 1. *Låt $x$ och $y$ vara två olika punkter på $S$. Om $x$ och $y$ inte är antipoder, går det precis en storcirkel genom $x$ och $y$, och alltså två storcirkelbågar mellan $x$ och $y$. Den kortare av dessa bågar är, efter lämplig parametrisering, en väg vars längd är kortast av alla vägar mellan $x$ och $y$. Om $x$ och $y$ är antipoder, finns oändligt många storcirkelbågar mellan $x$ och $y$. De är alla vägar av kortast möjliga längd mellan $x$ och $y$.*

BEVIS. Påståendena om antalet storcirkelbågar är uppenbara. Låt $v$ vara en väg från $x$ till $y$, och ta en indelning $t_0, \ldots, t_n$ av dess parameterintervall $[a, b]$. Centrumvinkeln mellan $x = v(t_0)$ och $v(t_i)$ kallar vi $\theta_i$. Vi påstår nu att

$$|v(t_i) - v(t_{i-1})| \geq 2 \sin |\theta_i - \theta_{i-1}|/2. \tag{1}$$

Observera att likhet här gäller då $v(t_i)$ och $v(t_{i-1})$ ligger på en storcirkelbåge genom $x$. Före beviset av (1) ska vi se hur (1) medför satsen. Välj $c < 1$. Enligt övning 2 blir $2 \sin |\theta_i - \theta_{i-1}|/2 \geq c|\theta_i - \theta_{i-1}|$ för alla $i$, bara indelningen är tillräckligt fin. Nu kan vi summera och får

$$\begin{aligned}\sum &\geq c(|\theta_1 - \theta_0| + |\theta_2 - \theta_1| + \cdots + |\theta_n - \theta_{n-1}|) \\ &\geq c(\theta_1 - \theta_0 + \theta_2 - \theta_1 + \cdots + \theta_n - \theta_{n-1}) \\ &= c\theta_n.\end{aligned}$$

Alltså är $L = \lim \sum \geq \theta_n$. Eftersom $\theta_n$ är centrumvinkeln mellan $x$ och $y$, dvs just längden av den kortare storcirkelbågen mellan $x$ och $y$, följer satsen. Man behöver här inte särbehandla det antipodala fallet.

ÖVNING 3. Bevisa (1), t ex på följande sätt. Låt $x$ vara *nordpolen* på sfären, och betrakta parallellcirkeln som går genom $v(t_i)$. Den kan också beskrivas som mängden av punkter på $S$ som bildar centrumvinkel $\theta_i$ med $x$. Projicera punkten $v(t_{i-1})$ vinkelrätt på det plan som bestäms av denna parallellcirkel. Använd nu Pythagoras sats för att se att avståndet mellan punkterna $v(t_i)$ och $v(t_{i-1})$ är som kortast då de *har samma longitud*, dvs ligger på samma storcirkel genom $x$.

Därmed är satsen bevisad. Med det sfäriska avståndet mellan $x$ och $y$ menar vi i fortsättningen längden av storcirkelbågen i satsen, vilket är detsamma som centrumvinkeln mellan $x$ och $y$. Detta avstånd blir aldrig större än $\pi$, och är $\pi$ då $x$ och $y$ är antipoder.

**4. Figurer på sfären.** Man kan tala om cirklar på sfären: Med den sfäriska cirkeln med medelpunkt $x \in S$ och radie $r > 0$ menar vi mängden av punkter på $S$ med sfäriskt avstånd $r$ till $x$. Observera att detta är en cirkel i det tredimensionella rummet, med en radie som är mindre än $r$. Motsvarande sfäriska cirkelskiva är mängden av punkter på $S$ med sfäriskt avstånd högst $r$ till $x$. En sådan brukar kallas en kalott i tredimensionell geometri. För $r > \pi$ består cirkelskivan av hela $S$, medan cirkeln inte innehåller några punkter.

ÖVNING 4. Ge formler för längden av en sfärisk cirkel och ytan av en sfärisk cirkelskiva med radie $r$. Vad ger de för $r = \pi/2$ och $r = \pi$?

Betrakta en av de tvåhörningar som bildas av två storcirklar, jämför fig. 1. Den har samma vinkel $\alpha$ i båda hörnen, och $\alpha$ är också vinkeln mellan storcirklarnas plan. Tvåhörningens yta $B$ är proportionell mot $\alpha$, och $\alpha = 2\pi$ motsvarar hela $S$, med ytan $4\pi$. Därför får vi

$$B = 2\alpha, \tag{2}$$

med andra ord är tvåhörningens yta lika stor som dess vinkelsumma.

Vi skall nu härleda en analog formel för en sfärisk triangel. Låt $A, B$ och $C$ vara tre punkter på $S$ med inbördes avstånd mindre än $\pi$, dvs inte antipoder. De tre korta storcirkelbågarna mellan punkterna delar $S$ i två delar, varav den ena uppenbart är mindre än den andra. Den större delen innehåller t ex till skillnad från den mindre många par av antipoder. Med den sfäriska triangeln $ABC$ menar vi den mindre av de två delarna.

Sats 2. *Ytan $T$ av den sfäriska triangeln $ABC$ uppfyller*

$$T = A + B + C - \pi,$$

*där $A, B, C$ betecknar triangelns vinklar vid resp hörn.*

Båda leden i ekvationen är positiva. Därför är vinkelsumman i en sfärisk triangel alltid större än $\pi$. Observera att då triangeln är mycket liten, är ytan nära noll och vinkelsumman alltså nära $\pi$. Detta stämmer med att en mycket liten del av sfären nästan är plan.

Övning 5. Bevisa Sats 2, t ex på följande sätt. Rita ut triangeln på en boll eller något liknande. Markera de tre punkternas antipoder $A', B'$ och $C'$. Förläng sidorna i $ABC$ så att man får sfäriska trianglar $A'BC$, $AB'C$ och $ABC'$, vars ytor vi kallar $T_A, T_B$ resp $T_C$. Drag också sidorna i triangeln $A'B'C'$ som förstås är kongruent med $ABC$. Observera nu att hela $S$ är indelad i 8 sfäriska trianglar, som är kongruenta två och två . Därför är $T+T_A+T_B+T_C$ precis hälften av ytan av $S$, så att

$$T + T_A + T_B + T_C = 2\pi. \tag{3}$$

Använd nu (2) för att få uttryck för $T + T_A$, $T + T_B$ och $T + T_C$. Kombinera med (3), så följer satsen.

**5. Det sfäriska sinusteoremet.** Vi avslutar med sinusteoremet för sfäriska trianglar. Låt $ABC$ vara en sfärisk triangel som förut. Kalla sidornas sfäriska längder för $a, b$ resp $c$, så att $a$ är längden av storcirkelbågen $BC$ osv.

SATS 3.

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}.$$

ÖVNING 6. Bevisa ett specialfall av denna formel: om vinkeln $B$ är rät gäller $\sin A = \sin a / \sin b$. Man kan göra så här.

Anta först att $b$ och $c$ är mindre än $\pi/2$. Låt $O$ vara sfärens medelpunkt och $A_1$ en punkt på radien $OA$ som lämpligen ligger nära $O$. Ett normalplan till $OA$ genom $A_1$ skär strålarna $OB$ och $OC$ i punkter $B_1$ resp $C_1$. (Rita, eller bygg hellre en modell.) Planen $OAB$ och $OBC$ är vinkelräta eftersom triangelvinkeln $B$ är rät. Därför är sträckan $B_1C_1$ vinkelrät mot planet $OAB$, så att vinkeln $A_1B_1C_1$ är rät. I den rätvinkliga (plana) triangeln $A_1B_1C_1$ känner vi också vinkeln $B_1A_1C_1$, som är lika med $A$. Detta ger $\sin A = B_1C_1/A_1C_1$. Triangeln $OB_1C_1$ är rätvinklig vid $B_1$ och dess vinkel vid $O$ är $a$. Alltså fås $\sin a = B_1C_1/OC_1$. Genom att betrakta triangeln $OA_1C_1$ får man på samma sätt $\sin b = A_1C_1/OC_1$. Kombinera nu dessa tre likheter, så följer den sökta formeln.

Ovanstående kräver bara små ändringar då $b$ och $c$ är godtyckliga. Punkterna $B_1$ och $C_1$ hamnar ibland på förlängningarna bakåt av strålarna $OB$ och $OC$. De vinklar vi fann vara $A$ och $a$ kan i stället bli $\pi - A$ respektive $\pi - a$.

ÖVNING 7. Bevisa Sats 3 med hjälp av Övning 6, genom att fälla en höjd i den sfäriska triangeln.

## Litteratur

Kulczycki, S., *Non-Euclidean Geometry.* Pergamon Press, Oxford 1961.