Fraktaler och iteration av funktioner

Hans Wallin

Umeå Universitet

1. Inledning. Georg Cantor (1845-1918), mängdlärans skapare, konstruerade en mängd som numera kallas *Cantormängden* och som visat sig ha många intressanta egenskaper. I våra dagar har Cantormängden uppmärksammats även utanför matematikerkretsar därför att den bidragit till att ge grunden för en beskrivning av många fenomen i naturen med hjälp av fraktaler (se nedan). Uppgiften i detta specialarbete är att konstruera Cantormängden och att lära känna en del av dess egenskaper samt att se hur detta kan läggas till grund för beskrivning av delar av naturen med fraktal geometri (se nedan).

2. Geometrisk konstruktion av Cantormängden C. Vi utgår från det slutna intervallet $[0,1]$ som vi kallar C_0. I första steget av konstruktionen delar vi $[0,1]$ i tre lika långa intervall och tar bort det mellersta, öppna intervallet. Den mängd som återstår kallar vi C_1 som alltså består av 2 slutna intervall av längd $1/3$ vardera. I andra steget av konstruktionen delar vi varje intervall i C_1 i tre lika långa delar och tar bort det mellersta, öppna intervallet. Vi får då kvar en mängd C_2 som består av $4 = 2^2$ slutna intervall av längd $1/9 = 3^{-2}$ vardera, o s v. Efter k steg har vi fått C_k som består av 2^k slutna intervall av längd 3^{-k} vardera. Vi får en oändlig följd av mängder $C_0, C_1, C_2, \ldots$. Figuren visar C_0, C_1, C_2 och C_3.

Cantormängden C är den mängd som återstår av $[0, 1]$ efter hela denna process, dvs C består av de punkter som tillhör C_k för alla $k = 0, 1, 2, \ldots$. Man skriver detta

$$C = \bigcap_{k=0}^{\infty} C_k.$$

Observera att C är en delmängd av C_k för alla k. Cantormängden C är alltså en starkt sönderskuren mängd; den är ett typexempel på det som kallas en fraktal. Exempel på punkter som tillhör C är ändpunkterna av de 2^k intervallen i C_k, för $k = 0, 1, \ldots,$ t ex punkterna $0, 1, 1/3$ och $2/3$.

a) Ange ändpunkterna till intervallen i C_2, C_3 och C_4.

b) Försök göra samma sak för C_k för ett godtyckligt k. Ledning: Betrakta ändliga summor av typen $\sum a_j/3^j$ där a_j antar värdena $0, 1$ och 2.

3. Beteckningen $f(A)$. Innan vi går vidare skall vi införa beteckningen $f(A)$ där f är en funktion och A är en mängd. Med $f(A)$ betecknar vi helt enkelt mängden av funktionsvärden $f(x)$ för vilka $x \in A$, $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$.

Exempel: Om $f(x) = 2x + 1$ och A består av punkterna $1, 2$ och 3, d v s $A = \{1, 2, 3\}$, så är $f(A) = \{f(1), f(2), f(3)\} = \{3, 5, 7\}$.

4. Konstruktion av C med iteration. Låt f_1 och f_2 vara funktioner definierade genom

$$f_1(x) = \frac{x}{3} \text{ och } f_2(x) = \frac{x}{3} + \frac{2}{3}.$$

Låt x_0 vara ett godtyckligt reellt tal som vi kallar för *startvärdet*. Vi definierar en oändlig följd av mängder $A_0, A_1, A_2, \ldots$ genom

$$(1) \qquad \begin{cases} A_0 = \{x_0\}, \\ A_n = f_1(A_{n-1}) \cup f_2(A_{n-1}), \text{ för } n = 1, 2, \ldots . \end{cases}$$

Det betyder att $A_1 = f_1(A_0) \cup f_2(A_0) = \{f_1(x_0), f_2(x_0)\}$, $A_2 = f_1(A_1) \cup f_2(A_1) = \{f_1(f_1(x_0)), f_1(f_2(x_0)), f_2(f_1(x_0)), f_2(f_2(x_0))\}$, o s v. Om t ex $x_0 = 1$ så är $A_1 = \{1/3, 1\}$ och $A_2 = \{1/9, 1/3, 7/9, 1\}$.

Följden $A_0, A_1, \ldots$ är konstruerad utgående från startvärdet x_0 och funktionerna f_1 och f_2 genom *iteration*; vi kallar $\{f_1, f_2\}$ ett *iterativt funktionssystem*.

c) Beräkna A_3 om $x_0 = 1$ och rita ut A_3 på talaxeln.

d) Gör samma sak för A_1, A_2 och A_3 om $x_0 = 2$.

e) Övertyga dig om att $C_n = f_1(C_{n-1}) \cup f_2(C_{n-1})$ för $n = 1, 2, \ldots$.

5. Ett datorprogram för iterationen. Om man vill beräkna och rita ut punkterna i A_n för stora värden på n är det lämpligt att använda dator.

f) Gör ett datorprogram som beräknar och ritar ut A_n. Använd programmet för att rita ut A_n för $n = 5$, $n = 7$ och $n = 10$ för några olika startvärden x_0. Jämför figuren med Cantormängden C.

6. För stora n är A_n ungefär lika med C. Du skall nu försöka bevisa det du sett i figuren i uppgift f.

g) Övertyga dig först om att varje $x \in C_k$ ligger på avstånd mindre än 3^{-k} från en punkt i C.

h) Använd uppgift g för att visa att (då n går mot oändligheten) punkterna i A_n närmar sig punkterna i C, oberoende av valet av x_0. Mer exakt: För varje $r > 0$ (r får vara godtyckligt litet) finns ett heltal $n(r)$ så att, för $n \geq n(r)$,

1° varje punkt i A_n ligger på avstånd mindre än r från en punkt i C och

2° för varje punkt $x \in C$ finns en punkt $y \in A_n$, så att $|x - y| < r$.

Egenskapen i uppgift h uttrycker matematikerna genom att säga att avståndet mellan mängderna A_n och C går mot noll. Detta är den matematiska förklaringen till att figuren i uppgift f för våra ögon ser ut som C, d v s att vi för stora n (och t o m för ganska små n) inte ser någon skillnad mellan C och A_n.

Det är alltså så att C drar till sig (attraherar) punkterna i A_n. Man kallar därför C för *attraktor* till det iterativa funktionssystemet $\{f_1, f_2\}$.

i) Övertyga dig om att $C = f_1(C) \cup f_2(C)$.

j) Försök att hitta andra mängder E av reella tal så att $E = f_1(E) \cup f_2(E)$.

7. Ett annat sätt att konstruera C genom iteration. Låt f_1 och f_2 vara samma funktioner som förut. Vi konstruerar $x_0, x_1, x_2, \ldots$ där x_0 är startvärdet och $x_1 = f_1(x_0)$ eller $x_1 = f_2(x_0)$ och valet mellan $f_1(x_0)$ och $f_2(x_0)$ sker slumpvis med sannolikhet 1/2 för varje val. Välj sedan $x_2 = f_1(x_1)$ eller $x_2 = f_2(x_1)$ med sannolikhet 1/2 för vardera valet, o s v.

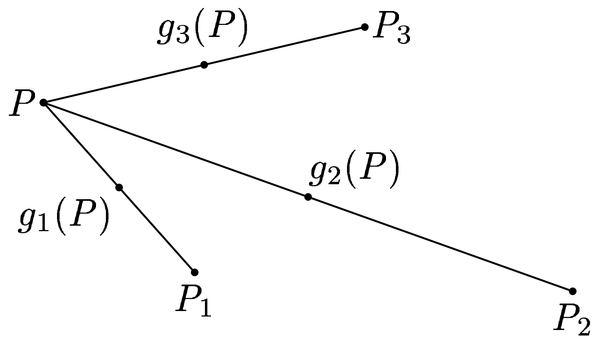
k) Skriv ett datorprogram för detta (du behöver en slumpgenerator).

l) Låt datorn rita ut $x_0, x_1, \ldots, x_{100}$ om $x_0 = 1$ (eller om x_0 är en annan punkt i C). Rita ut $x_{10}, x_{11}, \ldots, x_{100}$ om $x_0 = 2$ (eller om x_0 är en annan punkt utanför C).

m) Kan du ge en matematisk förklaring till det du ser i figuren i uppgift l?

n) Vad tror du händer om man tar andra sannolikheter i valet mellan f_1 och f_2?

8. Ett annat iterativt funktionssystem. Vi inför tre funktioner g_1, g_2 och g_3 definierade på följande sätt. Starta från en triangel i xy–planet med hörn P_1, P_2 och P_3 (t ex $P_1 = (-1, 0)$, $P_2 = (1, 0)$ och $P_3 = (0, \sqrt{3})$). För varje punkt P i xy–planet och för $j = 1, 2, 3$, definierar vi $g_j(P)$ som den punkt i planet som ligger mitt emellan P och P_j (se figuren).



o) Gör om så mycket som möjligt av steg 4 - 7, där f_1 och f_2 ersätts av g_1, g_2 och g_3. Ledning: (1) ersätts av $A_0 = \{P_0\}$, där P_0 är en punkt i planet och $A_n = g_1(A_{n-1}) \cup g_2(A_{n-1}) \cup g_3(A_{n-1})$, för $n = 1, 2, \ldots$. Sannolikheten 1/2 i steg 7 ersätts med sannolikheten 1/3.

p) Avsluta med att göra en geometrisk beskrivning av attraktorn till det iterativa funktionssystemet $\{g_1, g_2, g_3\}$ då $P_1 = (-1, 0)$, $P_2 = (1, 0)$ och $P_3 = (0, \sqrt{3})$. (Denna attraktor brukar kallas Sierpinskis triangel.)

9. Fraktal geometri. I princip kan man starta med två eller flera godtyckligt valda funktioner $\{g_1, g_2, \ldots, g_N\}$ och hoppas att man skall kunna göra en liknande teori som ovan. För många val av

$\{g_1, g_2, \ldots, g_N\}$ går detta och istället för Cantormängden C och Sierpinskis triangel S får man andra typer av attraktorer som, liksom C och S, är starkt sönderskurna mängder som kallas *fraktaler*. Man har funnit att lämpligt valda funktioner $\{g_1, \ldots, g_N\}$ ger attraktorer som ser ut som löv, träd och andra geometriska objekt i naturen. Genom iteration kan man återskapa starkt sönderbrutna och oregelbundna former i naturen. Formerna beskrivs matematiskt som attraktorer till iterativa funktionssystem. Dessa attraktorer är fraktaler och fraktal geometri är studiet av sådana formers geometri.

Litteratur

Gleick, J., *Kaos - vetenskap på nya vägar.* Bonniers, 1988.

Innehåller en del populärvetenskaplig fysik och matematik med anknytning till detta specialarbete.

Peitgen, H.O. & Saupe, D., (redaktörer), *The science of fractal images.* Springer-Verlag, 1988.

Kapitel 5 innehåller en del bilder och matematik om iterativa funktionssystem.

Wallin, H. & Fällström, A. & Wallin, M., *Matematiska bilder av fraktaler och kaos.* Matematiska Institutionen, Umeå Universitet, 1989.

Innehåller ett bildmaterial och datorprogram för gymnasiet.