

5B1116, Matematik II för Media. Lappskrivning 3, 2002-11-25, vänster

Skriv namn och födelsenummer på varje blad. Endast en uppgift per blad.

Varje uppgift ger maximalt 3 poäng. 5-7 poäng på lappskrivningen ger 1 bonuspoäng på tentamen, 8-9 poäng på lappskrivningen ger 2 bonuspoäng på tentamen.

Skrivtid: 60 minuter.

1. Transformera ekvationen

$$3x^2 + 2xy + 3y^2 - 2 = 0$$

till huvudaxelform.

Vad motsvarar ekvationen geometriskt?

Bestäm huvudaxlarnas riktningar.

Rita kurvan i xy -planet.

2. Låt

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Beräkna längden av denna kurva i \mathbb{R}^2 .

För beräkningarna kan någon av följande formler vara användbar

$$\begin{aligned} 1 - \cos 2\alpha - 2 \sin^2 \alpha &= 0, \\ 1 + \cos 2\alpha - 2 \cos^2 \alpha &= 0. \end{aligned}$$

Tänk på att

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a, & \text{om } a \geq 0, \\ -a, & \text{om } a < 0. \end{cases}$$

3. Låt

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + 2y^2}, & \text{om } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \\ 0, & \text{om } \mathbf{x} = \mathbf{0}, \end{cases}$$

där

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

(a) Är funktionen f kontinuerlig i punkten $\mathbf{x} = \mathbf{0}$? (Visa antingen att gränsvärdet $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} f(\mathbf{x}) = 0$, eller att gränsvärdet inte existerar.)

(b) Beräkna de partiella derivatorna

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{och} \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y},$$

dels då $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ och dels då $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(c) Beräkna

$$R(\mathbf{x}) = \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{0})}{|\mathbf{x}|} - \frac{1}{|\mathbf{x}|} (f_x(\mathbf{0}), f_y(\mathbf{0})) \cdot \mathbf{x}.$$

Är funktionen f differentierbar i punkten $\mathbf{x} = \mathbf{0}$?