Institutionen för Matematik
KTH

Tentamen i Differential- och Integralkalkyl I, 5B1102, del 2

Tisdagen den 24 april 2001, kl 14.00-19.00

Varje bonuspoäng ger 2 poäng till tentamensresultatet. Betygsgränserna för 3, 4 och 5 är preliminärt 32, 48 resp. 62 poäng.

Inga hjälpmedel är tillåtna.

. . . . . .

Uppgifter à 4 poäng:

1. Bestäm riktningsderivatan till funktionen $f(x,y,z) = ze^{x+y-2z}$ i riktningen $(2,0,1)$ i punkten $(1,3,1)$.

2. Bestäm de lokala extrempunkterna till funktionen

$$f(x,y) = x^4 - 2xy + 2y^2$$

och ange deras karaktär.

3. Beräkna linjeintegralen $\int_C (y - \sin x)\,dx + (x - \cos y)\,dy$ där C är räta linjen från punkten $(2,0)$ till punkten $(0,2)$.

4. Bestäm det största och det minsta värdet av funktionen $f(x,y) = xy^2$ i cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq 1$.

Uppgifter à 6 poäng:

5. En partikel rör sig längs parabeln $y^2 = 4x$ med konstant fart 2 . Bestäm hastighetsvektorn i punkten $(1,-2)$.

6. Beräkna integralen

$$\iiint_K xz\,dx\,dy\,dz$$

där K är tetraedern som bestäms av olikheterna $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, $x + y + z \leq 1$.

7. Beräkna arean av den del av ytan $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ där $0 \leq x \leq 1 - y^2$.

8. a) Visa att vektorfältet $\mathbf{F}(x,y) = (2x\ln y - 3x^2, \frac{x^2}{y})$ är konservativt i halvplanet $\{(x,y) : y > 0\}$ och bestäm en potentialfunktion till $\mathbf{F}$. (4p)

b) Beräkna linjeintegralen $\int_C (2x\ln y - 3x^2)\,dx + \frac{x^2}{y}\,dy$ där C är kurvan $x = t,\ y = 1 + \sin t$ från $(0,1)$ till $(\pi,1)$. (2p)

9. Beräkna volymen av den kropp som begränsas av ytorna $z = x^2$ och $z = 2 - x^2 - 2y^2$.

Uppgifter à 8 poäng:

10. Beräkna flödet av vektorfältet

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (x,y,z)$$

ut genom den yta som begränsas av hyperboloiden $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ och cylindern $x^2 + y^2 = 4$.

11. Är funktionen $f(x,y) = xy^2e^{-xy}$ begränsad i området $0 \le x \le 1,\ y \ge 0$?

12. Antag att

$$F(x,y,z) = 4x^2 - 2xz + y^2 - z^2.$$

a) Visa att ekvationen $F(x,y,z) = 0$ definierar z som en funktion av x och y i en omgivning till punkten $(1,2,-4)$. (4p)

b) Bestäm avståndet från punkten $(1,2,-4)$ till närmaste punkt där derivatan $\frac{\partial F}{\partial z}$ är $= 0$. (4p)

Lösningar till tentamen i Differential- och Integralkalkyl I, 5B1102, del 2, 010424

1. För $f(x,y,z) = z\,e^{x+y-2z}$ är

$$\text{grad} f(x,y,z) = (ze^{x+y-2z}, ze^{x+y-2z}, (1-2z)e^{x+y-2z})$$

och $\text{grad} f(1,3,1) = (e^2, e^2, -e^2) = e^2(1,1,-1)$. Riktningsderivatan

$$D_v f(1,3,1) = \text{grad} f(1,3,1) \cdot v = e^2(1,1,-1) \cdot \frac{(2,0,1)}{\sqrt{5}} = \underline{\frac{e^2}{\sqrt{5}}}.$$

2. Eftersom $D_1 f(x,y) = 4x^3 - 2y$ och $D_2 f(x,y) = -2x + 4y$, så är (x,y) en kritisk punkt om $y = 2x^3$ och $x = 2y$. Då är $x = 4x^3$, dvs. $x(4x^2-1) = 0$. De kritiska punkterna är $(0,0)$ och $\pm(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$. Från $A = D_{11}f(x,y) = 12x^2, B = D_{12}f(x,y) = -2, C = D_{22}f(x,y) = 4$ följer, att $AC - B^2 = 4(12x^2 - 1)$.

I punkten $(0,0)$ är $AC - B^2 = -4$. Punkten är en sadelpunkt.

I punkten $\pm(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ är $AC - B^2 = 8$. Dessa är lokala min. punkter. .

3. Linjens ekvation är $y = -x + 2$ och $x : 2 \to 0$. Integralen =

$$\int_2^0 (2 - x - \sin x)dx + (x - \cos(2-x))(-dx)$$

$$= \int_2^0 (2 - x - \sin x - x + \cos(2-x))dx$$

$$= [\cos x - x^2 + 2x - \sin(2-x)]_2^0 = \underline{1 - \sin 2 - \cos 2}.$$

4. 1) I de kritiska punkterna är $D_1 f(x,y) = y^2 = 0$ och $D_2 f(x,y) = 2xy = 0$. Alla punkter $(x,0)$ där $0 \le x \le 1$ är kritiska punkter och $f(x,0) = 0$.

2) På cirkeln $x^2 + y^2 = 1$ är $f(x,y) = g(x) = x(1-x^2) = x - x^3$. Derivatan $g'(x) = 1 - 3x^2 = 0$ om $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. I de kritiska punkterna $g(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}) = \pm\frac{2}{9}\sqrt{3}$ och i ändpunkterna $g(-1) = g(1) = 0$.

Från resultaten i 1) och 2) följer att <u>största värdet av $f = \frac{2}{9}\sqrt{3}$</u> och <u>minsta värdet $= -\frac{2}{9}\sqrt{3}$</u>.

5. Låt $r(t) = (x(t), y(t)) = (\frac{y(t)^2}{4}, y(t))$. Hastighetsvektorn $r'(t) = (\frac{y(t)y'(t)}{2}, y'(t))$. Farten $|r'(t)| = \sqrt{\frac{y^2y'^2}{4} + y'^2} = 2$. Då är $y^2y'^2 + 4y'^2 = 16$. Det följer att $y'(t) = \pm\frac{4}{\sqrt{4+y^2}}$ för alla t. Om t_0 är en punkt där $y(t_0) = -2$, så är $y'(t_0) = \pm\frac{4}{\sqrt{8}}$. Vi får att $\underline{r'(t_0) = \pm(-\sqrt{2}, \sqrt{2})}$.

6. Låt T vara triangeln: $x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1$.

$$\iiint_K xz\,dz\,dy\,dx = \iint_T (\int_0^{1-x-y} xzdz)\,dx\,dy$$

$$= \iint_T \frac{x}{2}(1-x-y)^2\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int_0^1 (\int_0^{1-x} x(1-x-y)^2 dy)dx$$

$$= -\frac{1}{6}\int_0^1 x[(1-x-y)^3]_{y=0}^{1-x}dx = \frac{1}{6}\int_0^1 x(1-x)^3 dx$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^1 (x - 3x^2 + 3x^3 - x^4)dx = \underline{\frac{1}{120}}.$$

7. Arean är $\iint_S dS$, där

$$dS = \sqrt{1 + (\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}})^2 + (\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}})^2}\,dxdy = \sqrt{2}\,dxdy.$$

$$\iint_S dS = \sqrt{2}\iint_{0\leq x\leq 1-y^2} dxdy = \sqrt{2}\int_{-1}^1 (\int_0^{1-y^2} dx)dy$$

$$= \sqrt{2}\int_{-1}^1 (1-y^2)dy = 2\sqrt{2}[y - \frac{y^3}{3}]_0^1 = \underline{\frac{4\sqrt{2}}{3}}.$$

8. a) Om $\mathbf{F} =$ grad u, så är $D_1 u = -3x^2 + 2x\ln y$. Genom integration får vi $u(x,y) = -x^3 + x^2\ln y + g(y)$. Då är $D_2 u = \frac{x^2}{y} + g'(y) = \frac{x^2}{y}$. Det följer att $g'(y) = 0$ och $g(y) = C$. Eftersom funktionen $u(x,y) = -x^3 + x^2\ln y + C$ uppfyller villkoret $\mathbf{F} =$ grad u, så är $\mathbf{F}$ konservativt och $u(x,y) = -x^3 + x^2\ln y$ är en potential till $\mathbf{F}$.

b) $\int_C (2x\ln y - 3x^2)\,dx + \frac{x^2}{y}\,dy = u(\pi,1) - u(0,1) = \underline{-\pi^3}$.

9. Från ekvationen $x^2 = 2 - x^2 - 2y^2$ får vi skärningskurvans projektion i xy -planet; den är $x^2 + y^2 = 1$. Eftersom ytan $z = 2 - x^2 - 2y^2$ är ovanför ytan $z = x^2$, är volymen

$$V = \iint_{x^2+y^2\leq 1} 2(1 - x^2 - y^2)\,dx\,dy.$$

I polära koordinater

$$V = 2\int_0^{2\pi}(\int_0^1 (1-r^2)r\,dr)\,d\varphi = 4\pi[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}]_0^1 = \underline{\pi}.$$

10. Med hjälp av divergenssatsen får vi

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot n\,dS = \iiint_K \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV = 3\iiint_K dV.$$

där K är kroppen som begränsas av hyperboloiden och cylindern. Den bestäms av olikheterna

$$-\sqrt{x^2+y^2-1} \le z \le \sqrt{x^2+y^2-1},\ 1 \le x^2+y^2 \le 4.$$

Integralen

$$= 6\iint_{1\le x^2+y^2\le 4} \sqrt{x^2+y^2-1}\,dx\,dy = 6\int_1^2\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2-1}\,r\,dr\,d\varphi$$

$$= 12\pi[\frac{1}{3}(r^2-1)^{\frac{3}{2}}]_1^2 = \underline{12\pi\sqrt{3}}.$$

11. På en sträcka $y = b,\ 0 \le x \le 1$ (där $b > 1$) antar funktionen $f(x,b) = g(x) = b^2xe^{-bx}$ ett största värde. Derivatan $g'(x) = b^2(1-bx)e^{-bx}$ och $g'(x) = 0$ om $x = \frac{1}{b}$. I punkten $(\frac{1}{b}, b)$ är $f(\frac{1}{b}, b) = \frac{b}{e}$. Det största värdet som f antar på sträckan är $\ge \frac{b}{e}$. Det följer att f inte är begränsad i området $0 \le x \le 1,\ y \ge 0$.

12. a) Eftersom $D_3F(x,y,z) = -2x-2z$ och $D_3F(1,2,-4) = 6 \ne 0$, definierar ekvationen $F(x,y,z) = 0$ z som en funktion av x och y i en omgivning av punkten $(1,2)$ enligt implicitfunktionssatsen.

b) Vi skall bestämma avståndet mellan punkten $(1,2,-4)$ och planet $x+z = 0$. Vi bestämmer de kritiska punkterna till funktionen $h(x,y) = (1-x)^2+(2-y)^2+(x-4)^2$. De partiella derivatorna till h är $D_1(h) = 4x-10$ och $D_2(h) = 2(y-2)$. h har en kritisk punkt: $(5/2, 2)$. Denna är en absolut minimipunkt. Avståndet är $\sqrt{h(\frac{5}{2},2)} = \underline{\frac{3\sqrt{2}}{2}}$.