**KTH Institutionen för Matematik**
Olof Heden, Bronislaw Krakus, Harald Lang, Jan Olov Strömberg

**Kortfattade lösningar 5B1102 (Differential- och Integralkalkyl II)**
**TEN 2 den 2 maj 2000 kl. 14.00–19.00.**

---

1. Vi har $x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$. Uttrycket $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y}$ måste i polära koordinater vara ett uttryck i $r$, $\theta$, $\dfrac{\partial f}{\partial \theta}$ och $\dfrac{\partial f}{\partial r}$. Vi beräknar därför $\dfrac{\partial f}{\partial \theta} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial \theta} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial \theta} = \dfrac{\partial f}{\partial x} r(-1)\sin\theta + \dfrac{\partial f}{\partial y} r\cos\theta = -y\dfrac{\partial f}{\partial x} + x\dfrac{\partial f}{\partial y}$ och $\dfrac{\partial f}{\partial r} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial r} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial r} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \dfrac{\partial f}{\partial y}\sin\theta = \dfrac{x}{r}\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{y}{r}\dfrac{\partial f}{\partial y}$. Vi ser alltså att den första uträkningen var överflödig, för den andra visar direkt att $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = r\dfrac{\partial f}{\partial r}$.

2. Det gäller att $\bar{v} = (\cos 30°, \sin 30°) = (\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2})$ och $\nabla f = (\dfrac{-y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}) = (\dfrac{-2}{5}, \dfrac{1}{5})$ i punkten $(1, 2)$. Alltså riktningsderivatan $\mathbf{D}_{\bar{v}} = \nabla f \bullet \bar{v} = \dfrac{-2}{5}\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{5}\dfrac{1}{2} = \underline{\underline{\dfrac{1-2\sqrt{3}}{10}}}$.

3. I en gemensam tangeringspunkt måste de båda ytornas normaler vara parallella, alltså $(2x, 2y, 4z) = \lambda(y, x, 2z)$ för något tal $\lambda$. Detta gäller om.m. $\lambda = 2$ och $x = y$. Sätter vi in $y = x$ i ekvationen för ytorna får vi $2x^2 + 2z^2 = A$ respektive $x^2 + z^2 = 2$ och vi ser att detta ger att $\underline{\underline{A = 4.}}$ (För detta värde på $A$ tangerar ytorna varandra i alla punkter $(x, y, z) = (t, t, \pm\sqrt{2-t^2})$, $|t| \le \sqrt{2}$.)

4. Vi undersöker dels inre kritiska punkter, dels randpunkter, dels vad som händer då $r = \sqrt{x^2+y^2} \to \infty$. För inre kritiska punkter gäller

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{y}{1+x^2+y^2} = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{y}{1+x^2+y^2} = 0 \end{cases} \quad \text{dvs.} \quad \begin{cases} \dfrac{-2xy}{(1+x^2+y^2)^2} = 0 & (1) \\ \dfrac{1+x^2-y^2}{(1+x^2+y^2)^2} = 0 & (2) \end{cases}$$

Ekvation (1) ger $x = 0$ eller $y = 0$. Men $y = 0$ ger inte inre punkter, så vi tittar bara på $x = 0$ för ögonblicket. Ekvation (2) ger nu $y = 1$. Alltså, inre kritiska punkter är bara punkten $(0, 1)$, och $f(0, 1) = 1$. Så till randpunkter, dvs $y = 0$. För dessa gäller uppenbarligen $f(x, 0) = 0$. Slutligen ser vi att för $y \ge 0$ gäller att $0 \le f(x, y) \le \frac{r}{1+r^2} \to 0$ då $r \to \infty$, så $f(0, 1) = 1$ och $f(x, 0) = 0$ måste vara största respektive minsta värdet.

5. $\mathrm{d}f = \dfrac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \dfrac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y = \dfrac{8x-9y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x + \dfrac{9x+8y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y = 1.4\mathrm{d}x + 5.2\mathrm{d}y$ för $x = 2,\ y = 1$. För små värden på $\Delta x$ och $\Delta y$ gäller $f(2+\Delta x, 1+\Delta y) \approx f(2,1) + 1.4\Delta x + 5.2\Delta y$, och med $\Delta x = 0.1$ och $\Delta y = 0.05$ får vi $f(2.1, 1.05) \approx 10.61 + 0.14 + 0.26 = \underline{\underline{11.01.}}$

6. Vi får $\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \begin{vmatrix} 1-v & -u \\ v & u \end{vmatrix} \mathrm{d}u\mathrm{d}v = u\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$. Området $D$ i $xy$-planet avbildas på rektangeln som begränsas av linjerna $u = 1,\ u = 2,\ v = 0,\ v = 1$ i $uv$-planet. Alltså $\displaystyle\iint_D e^{\frac{y}{x+y}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \Big(\int_1^2 u\,\mathrm{d}u\Big)\, e^v\,\mathrm{d}v = \underline{\underline{\frac{3}{2}(e-1)}}$

7. En naturlig metod är att lösa ut $z$ ur bivillkoret och substituera, och sedan maximera volymen över $x$ och $y$. Det är dock något enklare att använda Lagranges multiplikatormetod. Vi skall maximera $xyz$ under bivillkoret $5x + 3y + z = 45$, vilket ger

$$yz = 5\lambda \tag{1}$$
$$xz = 3\lambda \tag{2}$$
$$xy = \lambda \tag{3}$$
$$5x + 3y + z = 45 \tag{4}$$

Vi substituerar $\lambda = xy$ från (3) i de övriga ekvationerna:

$$yz = 5xy \tag{1'}$$
$$xz = 3xy \tag{2'}$$
$$5x + 3y + z = 45 \tag{4}$$

Eftersom $x$ och $y$ måste vara positiva för en positiv volym ger detta

$$z = 5x \tag{1''}$$
$$z = 3y \tag{2''}$$
$$5x + 3y + z = 45 \tag{4}$$

Sätter vi in (1") och (2") i (4) får vi $3z = 45$, dvs. $z = 15$. Nu ger (1") och (2") omedelbart $x = 3,\ y = 5$. Maximala volymen är alltså $3 \cdot 5 \cdot 15 = \underline{\underline{225.}}$

8. Vi parametriserar kurvan; $x = 2\cos t,\ y = 2\sin t,\ z = 4\sin^2 t;\ 0 \le t \le 2\pi$. Detta ger $\displaystyle\int_C x\,\mathrm{d}z - y\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} (2\cos t \cdot 8\sin t\cos t - 2\sin t \cdot (-2)\sin t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} 16\cos^2 t\sin t + 4\sin^2 t\,\mathrm{d}t = \Big[-\frac{16}{3}\cos^3 t\Big]_0^{2\pi} + 2\Big[t - \sin t\cos t\Big]_0^{2\pi} = \underline{\underline{4\pi.}}$

9. Vi deriverar ekvationerna map. $x$:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\partial x}{\partial x} = 3v^2\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial y}{\partial x} = 3u\frac{\partial v}{\partial x} + 3v\frac{\partial u}{\partial x} + 4u\frac{\partial u}{\partial x} \\ &= 5\frac{\partial u}{\partial x} + 6\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

Varur vi löser ut $\underline{\underline{\frac{\partial u}{\partial x} = 6}}$. På samma sätt får vi om vi deriverar ekvationerna map. $y$:

$$0 = \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

och

$$1 = \frac{\partial y}{\partial y} = 5\frac{\partial u}{\partial y} + 6\frac{\partial v}{\partial y}$$

Varur vi löser ut $\underline{\underline{\frac{\partial u}{\partial y} = -1}}$.

10. Vi använder Gauss' sats och får $\iint_S \mathbf{F} \bullet \widehat{\mathbf{N}}\,\mathrm{d}S = \iiint_K \operatorname{div}\mathbf{F}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_K z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ där $K$ är halvklotet $x^2+y^2+z^2 \le 1,\ \ z \ge 0$. Vi beräknar trippelintegralen: $\int_0^1 z\Big(\iint_{x^2+y^2\le 1-z^2} 1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}z = \int_0^1 z\pi(1-z^2)\,dz = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}}}$.

11a. Riktningsderivatan $= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\big[f(h\cos\alpha, h\sin\alpha) - f(0,0)\big] = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}h^2\cos\alpha\sin\alpha\sin\frac{1}{h^2} \underline{\underline{= 0,}}$ ty $\frac{1}{h}h^2 = h \to 0$ och $|\sin\frac{1}{h^2}| \le 1$.

b. Funktionen är <u>kontinuerlig</u> i origo, ty med $r = \sqrt{x^2+y^2}$ gäller $|f(x,y) - f(0,0)| = |x||y||\sin\frac{1}{r^2}| \le |x||y| \le r^2 \to 0$ då $r \to 0+$. Det är väsentligt här att det sista ledet, $r^2$, bara beror på $r$!