Institutionen för matematik, KTH
Olof Heden, Bronislaw Krakus, Harald Lang, Jan Olov Strömberg

Tentamensskrivning, 2000–08–30, kl. 8–13.

5B1102, Differential– och integralkalkyl I, del 2.

För godkänt krävs minst 32 poäng.
Betygsgränserna för 4 och 5 är preliminärt 48 resp. 62 poäng.
Varje bonuspoäng ger 2 poäng på tentamen.
Samtliga behandlade uppgifter bör förses med utförlig lösning.
Inga hjälpmedel är tillåtna.

ANGE GRUPPNUMMER ELLER LÄRARENS NAMN PÅ OMSLAGET !

---

1. Bestäm konstanten a så att funktionen $z = (3x - 2y)f(x + ay)$ satisfierar ekvationen $2z'_x + 3z'_y = 0$, då f är en godtycklig, deriverbar funktion av en variabel. (4p)

2. Visa att ekvationen $x^3 + y^3 + z^3 + xz + 5y = 9$ i närheten av punkten $(1,1)$ definierar precis en funktion $z = z(x,y)$ sådan att $z(1,1) = 1$. Beräkna riktningsderivatan $z'_{\boldsymbol{v}}(1,1)$ i riktning av vektorn $\boldsymbol{v} = (4,3)$. (4p)

3. Beräkna dubbelintegralen $\iint_{\mathbf{D}} \frac{2x}{1+y}\,dxdy$ över det ändliga området som begränsas av linjerna $y = x$, $y = 0$ och $x = 1$. (5p)

4. Bestäm samtliga lokala maxima och minima till funktionen $f(x,y) = x^3 + 3x^2 - 6xy + y^2$. (4p)

5. Bestäm största och minsta värdet av $f(x,y) = 2x^3 - xy^2$ i området $x^2 + y^2 \le 9$. (5p)

6. Beräkna flödet av fältet $\boldsymbol{F} = (x,y,z)$ genom ytan $z = 1 + 2x + 3y$, $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le x$. Enhetsnormalen till ytan har positiv z–komponent. (4p)

7. Låt $\mathbf{S}_1$ och $\mathbf{S}_2$ vara ytorna $z = 8 - x^2 + y^2$ och $z = x^2 + 3y^2$.

   a. Beräkna volymen av den kropp som begränsas av $\mathbf{S}_1$ och $\mathbf{S}_2$. (4p)

   b. Vektorfältet $\boldsymbol{F} = (xy + z,\ y - y^2,\ x + yz)$ beskriver ett flöde genom den kropp som begränsas av ytorna $\mathbf{S}_1$ och $\mathbf{S}_2$. Beräkna det totala flödet ut från kroppen. (4p)

v.g.v

8. Låt $\boldsymbol{F} = (xy^2, yz^2, zx^2)$. Ange vilka av följande uttryck som har mening och beräkna dem: div rot $\boldsymbol{F}$, rot div $\boldsymbol{F}$, grad rot rot $\boldsymbol{F}$, grad grad div $\boldsymbol{F}$. (6p)

9. Betrakta vektorfältet $\boldsymbol{F} = (3x^2 + y, 3y^2 + x)$.

   a. Visa att $\boldsymbol{F}$ är konservativt i xy–planet. (2p)

   b. Bestäm en potential till $\boldsymbol{F}$. (4p)

   c. Beräkna linjeintegralen $\int_\Gamma (3x^2 + y)\,dx + (3y^2 + x)\,dy$ då Γ går från $(0,0)$ till $(1, 2)$ längs kurvan $2x^2 - xy + 2x - y = 0$. (2p)

10. En partikel färdas i planet så att dess acceleration vid tiden t är $\boldsymbol{a}(t) = \left(1, \frac{1}{\sqrt{t}}\right)$.

    Partikelns hastighet vid tiden $t = 1$ är $\boldsymbol{v}(1) = (0,2)$. Hur lång bana genomlöper partikeln under tidsintervallet $1 \le t \le 3$? (7p)

11. Undersök om hela ytan $z = y - 2x + \sqrt{20 - 3x^2 - y^2}$ ligger på samma sidan av planet $z = x + 2y - 13$. (7p)

12. Den maximala arean för en triangel vars hörn ligger på en cirkel antas för en liksidig triangel. Vilken är den maximala arean av en triangel vars hörn ligger på ellipsen $a^2x^2 + b^2y^2 = 1$? (8p)

Lycka till!

Lösningsförslag till tentamensskrivningen i Diff- och int., 5B1102, del 2, 2000–08–30.

1. Sätt $t = x + ay$. Vi har $z = (3x - 2y)f(t)$,
$z'_x = 3f(t) + (3x - 2y)f'(t)t'_x = 3f(t) + (3x - 2y)f'(t)$ och
$z'_y = -2f(t) + (3x - 2y)f'(t)t'_y = -2f(t) + a(3x - 2y)f'(t)$ vilket ger
$2z'_x + 3z'_y = (2 + 3a)(3x - 2y)f'(t) = 0 \Leftrightarrow a = -2/3.$ **Svar:** $a = -2/3$.

2. Funktionen $g(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 + xz + 5y - 9$ har kontinuerliga partiella derivator i en omgivning av punkten $(1,1,1)$. Vi har $g'_z = 3z^2 + z$, $g(1,1,1) = 0$ och $g'_z(1,1,1) \neq 0$ vilket visar att ekvationen $x^3 + y^3 + z^3 + xz + 5y = 9$ definierar i närheten av punkten $(1,1)$ precis en deriverbar funktion $z = z(x,y)$ sådan att $z(1,1) = 1$.
Implicit derivering av $x^3 + y^3 + z^3 + xz + 5y = 9$ map x resp y ger $3x^2 + 3z^2z'_x + z + xz'_x = 0$ resp $3y^2 + 3z^2z'_x + xz'_y + 5 = 0$. Insättningen av $(x,y,z) = (1,1,1)$ ger $z'_x(1,1) = -1$, $z'_y(1,1) = -2$ och vi får $z'_{\mathbf{v}}(1,1) = (-1,-2) \cdot (4,3)/\sqrt{4^2 + 3^2} = -2$. **Svar:** -2.

3. $$\iint_{\mathbf{D}} \frac{2x}{1+y}\,dx\,dy = \int_0^1 \frac{1}{1+y}\,dy \int_y^1 2x\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+y}\left[x^2\right]_y^1 dy = \int_0^1 \frac{1-y^2}{1+y}\,dy = \int_0^1 (1-y)\,dy$$ **Svar:** $1/2$.

4. $$f(x,y) = x^3 + 3x^2 - 6xy + y^2 \Rightarrow \begin{cases} f'_x = 3x^2 + 6x - 6y = 0 \\ f'_y = 2y - 6x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (0,0) \text{ eller } (4,12).$$
$A = f''_{xx} = 6x + 6$, $B = f''_{xy} = -6$, $C = f''_{yy} = 2$.
I punkten $(4,12)$ fås $AC - B^2 = 24 > 0 \Rightarrow$ extrempunkt, $A = 30 > 0 \Rightarrow$ minimipunkt.
I punkten $(0,0)$ fås $AC - B^2 = -24 < 0 \Rightarrow$ sadelpunkt. **Svar:** lokal minimum i $(4,12)$.

5. Eftersom $f(x,y) = 2x^3 - xy^2$ är kontinuerlig och den tillåtna mängden $x^2 + y^2 \leq 9$ är sluten och begränsad så antar f både ett största och ett minsta värde i mängden. Detta sker antingen i en inre kritisk punkt eller i en kritisk punkt på randen. (Några singulära punkter finns inte.)
Inre punkter: Dessa fås ur ekvsystemet $f'_x = 6x^2 - y^2 = 0$, $f'_y = -2xy = 0$. Vi får punkten $(0,0)$.
Randen: $x^2 + y^2 = 9 \Leftrightarrow y^2 = 9 - x^2$, $|x| \leq 3$. Man har $f(x,y) = 2x^3 - x(9 - x^2) = 3x^3 - 9x = h(x)$ och ur ekv $h'(x) = 9x^2 - 9 = 0$ får vi $x = \pm 1$ svarande mot punkterna $(1,\pm\sqrt{8})$, $(-1,\pm\sqrt{8})$.
Sammanfattningsvis får vi punkterna $(0,0)$, $(1,\pm\sqrt{8})$, $(-1,\pm\sqrt{8})$ samt punkterna $(\pm 3,0)$ svarande mot ändpunlkterna på på intervallet $|x| \leq 3$. I dessa punkter antar f värdena 0, -6, 6, 54 och -54 alltså **Svar:** Största värdet = 54, minsta värdet = –54.

6. Flödet ges av $\iint_{\mathbf{S}} \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{N}}\,dS$, där $\boldsymbol{F} = (x,y,z)$, $\mathbf{S}$ är ytan $z = 1 + 2x + 3y$, $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq x$ och $\hat{\boldsymbol{N}}\,dS = \pm(-z'_x, -z'_y, 1)\,dx\,dy = (-2,-3,1)\,dx\,dy$. Projektionen $\mathbf{D}$ av $\mathbf{S}$ på xy–planet ges av $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq x$.
$$\iint_{\mathbf{S}} \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\,dS = \iint_{\mathbf{D}} (x,y,1 + 2x + 3y) \cdot (-2,-3,1)\,dx\,dy = \iint_{\mathbf{D}} dx\,dy = \text{arean av } \mathbf{D} = 2.$$ **Svar:** 2.

7a. Ytorna skär varandra längs kurvan $\begin{cases} z = 8 - x^2 + y^2 \\ z = x^2 + 3y^2 \end{cases}$. Kurvans projektion i xy-planet fås genom att eliminera z ur systemet vilket ger $x^2 + 3y^2 = 8 - x^2 + y^2$, dvs en cirkel med ekvationen $x^2 + y^2 = 4$. Om $\mathbf{D}$ betecknar området inom cirkeln, får vi
$$V = \iint_{\mathbf{D}} (8 - x^2 + y^2 - x^2 - 3y^2)\,dx\,dy = 2\iint_{\mathbf{D}} (4 - x^2 - y^2)\,dx\,dy = \{\text{polära koordinater, } \mathbf{G}\text{: } 0 \leq r \leq 2,$$
$$0 \leq v \leq 2\pi\} = 2\iint_{\mathbf{G}} (4 - r^2)r\,dr\,dv = 2\int_0^2 (4r - r^2)\,dr \int_0^{2\pi} dv = 4\pi \int_0^2 (4r - r^2)\,dr = 16\pi.$$ **Svar:** 16π.

7b. Om $\mathbf{S}$ betecknar den totala begränsningsytan och $\hat{\boldsymbol{N}}$ är den ut ur kroppen $\mathbf{K}$ riktade enhetsnormalen så har vi

Flödet ut ur kroppen $\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\hat{\boldsymbol{N}}\,dS$ = { divergenssatsen } = $\iiint_K \operatorname{div}\boldsymbol{F}\,dxdydz = \iiint_K dxdydz$ =

= volymen av $\mathbf{K}$ = { enligt 7a } = 16π. **Svar:** 16π.

---

8. $\operatorname{rot}\boldsymbol{F} = \nabla\times\boldsymbol{F} = (-2yz, -2xz, -2xy)$, $\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{F} = \nabla\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{F} = 0$ (vilket gäller för godtyckliga, kontinuerligt deriverbara $\boldsymbol{F}$).
$\operatorname{div}\boldsymbol{F}$ är en skalär $\Rightarrow$ $\operatorname{rot}\operatorname{div}\boldsymbol{F}$ ej definierad.
$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{F}$ är en vektor $\Rightarrow$ $\operatorname{grad}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{F}$ ej definierad.
$\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{F}$ är en vektor $\Rightarrow$ $\operatorname{grad}\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{F}$ ej definierad. **Svar:** $\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{F} = 0$.

9a. Vi har $P(x,y) = 3x^2 + y$, $Q(x,y) = 3y^2 + x$, $P'_y = 1 = Q'_x$ och inga singulära punkter $\Rightarrow$ vektorfältet är konservativt i xy–planet.
9b. Vi söker en funktion $U(x,y)$ sådan att $\operatorname{grad} U = (3x^2 + y, 3y^2 + x)$ dvs

$$\begin{cases} U'_x = 3x^2 + y \\ U'_y = 3y^2 + x \end{cases}$$

$U'_x = 3x^2 + y$ medför att $U = x^3 + xy + f(y)$. Derivering ger $U'_y = x + f'_y$ samtidigt som $U'_y = 3y^2 + x$. Jämförelse av de båda uttrycken ger $f'_y = 3y^2$ dvs $f(y) = y^3 + C$ och $U = x^3 + xy + y^3 + C$.
9c. Enligt 9ab kan Γ ersättas med en godtycklig annan väg från (0,0) till (1,2) och linjeintegralens värde är $U(1,2) - U(0,0) = 11$. **Svar:** $U = x^3 + xy + y^3 + C$. Integralen = 11.

---

10. Accelerationen $\boldsymbol{a}(t) = \left(1, \frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ $\Rightarrow$ hastigheten $\boldsymbol{v}(t) = \int \boldsymbol{a}(t)\,dt = (t + C_1, 2\sqrt{t} + C_2)$. Vi har

$\boldsymbol{v}(1) = (1 + C_1, 2 + C_2) = (0,2)$, vilket ger $C_1 = -1$ och $C_2 = 0$, alltså $\boldsymbol{v}(t) = (t - 1, 2\sqrt{t})$. Den aktuella kurvans båglängd ges av

$$\int_1^3 |\boldsymbol{v}(t)|\,dt = \int_1^3 \sqrt{(t-1)^2 + (2\sqrt{t})^2}\,dt = \int_1^3 \sqrt{t^2 + 2t + 1}\,dt = \int_1^3 (t+1)\,dt = 6.$$

Svar: 6.

---

11. Ytan $z_1 = y - 2x + \sqrt{20 - 3x^2 - y^2}$ ligger på ena sidan av planet $z_2 = x + 2y - 13$ $\Leftrightarrow$ $z_2 - z_1$ har konstant tecken. Sök det största och det minsta värdet av den kontinuerliga funktionen $f(x,y) = z_2 - z_1 = 3x + y - 13 - \sqrt{20 - 3x^2 - y^2}$ på ellipsskivan $3x^2 + y^2 \le 20$.
Inre punkter ($20 - 3x^2 - y^2 > 0$):

$$\begin{cases} 0 = f'_x = 3 + \dfrac{3x}{\sqrt{20 - 3x^2 - y^2}} \\ 0 = f'_y = 1 + \dfrac{y}{\sqrt{20 - 3x^2 - y^2}} \end{cases}$$

Ur $f'_x - 3f'_y = 0$ får man $y = x$ vilket insatt i ekvationen $f'_x = 0$ ger $(x,y) = (-2,-2)$. I denna punkt är $f(-2,-2) < 0$.

Rand ($3x^2 + y^2 - 20 = 0$): Parametrisering $x = \sqrt{\frac{20}{3}}\cos t$, $y = \sqrt{20}\sin t$, $0 \le t \le 2\pi$, ger $f(x,y) = \sqrt{60}\cos t + \sqrt{20}\sin t - 13 < \sqrt{60} + \sqrt{20} - 13 < 0$.
Sammanfattning: Det största värdet antas antingen i punkten $(-2,-2)$ (där f är < 0) eller på randen (där f är < 0) alltså $f(x,y) < 0$ för alla (x,y). **Svar:** Ja.

---

12. Låt T vara en sådan triangel. Vi byter koordinatsystem i xy–planet genom att sätta $u = ax$ och $v = by$. Funktionerna u och v är linjära varför triangeln T avbildas på en triangel, säg S. Ellipsen $a^2x^2 + b^2y^2 = 1$ deformeras till cirkeln $u^2 + v^2 = 1$. Vi har

$$\text{arean av } S = \iint_S du\,dv = \iint_T \left|\det\frac{d(u,v)}{d(x,y)}\right| dx\,dy = \iint_T ab\,dx\,dy = ab\cdot\text{arean av } T$$

dvs. maximala arean av T = (maximala arean av S)/ab = $\frac{3\sqrt{3}}{4ab}$. **Svar:** $\frac{3\sqrt{3}}{4ab}$.