Institutionen för matematik, KTH
Olof Heden, Bronislaw Krakus, Harald Lang, Jan Olov Strömberg

Tentamensskrivning, 2000–08–30, kl. 8–13.

5B1102, Differential– och integralkalkyl I, del 2.

För godkänt krävs minst 32 poäng.
Betygsgränserna för 4 och 5 är preliminärt 48 resp. 62 poäng.
Varje bonuspoäng ger 2 poäng på tentamen.
Samtliga behandlade uppgifter bör förses med utförlig lösning.
Inga hjälpmedel är tillåtna.

ANGE GRUPPNUMMER ELLER LÄRARENS NAMN PÅ OMSLAGET !

---

1. Bestäm konstanten a så att funktionen $z = (3x - 2y)f(x + ay)$ satisfierar ekvationen $2z'_x + 3z'_y = 0$, då f är en godtycklig, deriverbar funktion av en variabel. (4p)

2. Ekvationen $x^3 + y^3 + z^3 + xz + 5y = 9$ definierar i närheten av punkten $(1,1)$ precis en funktion $z = z(x,y)$ sådan att $z(1,1) = 1$. Beräkna riktningsderivatan $z'_{\boldsymbol{v}}(1,1)$ i riktning av vektorn $\boldsymbol{v} = (4,3)$. (4p)

3. Beräkna dubbelintegralen $\iint_{\mathbf{D}} \frac{2x}{1+y}\,dxdy$ över det ändliga området som begränsas av linjerna $y = x$, $y = 0$ och $x = 1$. (5p)

4. Bestäm samtliga lokala maxima och minima till funktionen $f(x,y) = x^3 + 3x^2 - 6xy + y^2$. (4p)

5. Bestäm största och minsta värdet av $f(x,y) = 2x^3 - xy^2$ i området $x^2 + y^2 \le 9$. (5p)

6. Beräkna flödet av fältet $\boldsymbol{F} = (x,y,z)$ genom ytan $z = 1 + 2x + 3y$, $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le x$. Enhetsnormalen till ytan har positiv z–komponent. (4p)

7. Låt $\mathbf{S}_1$ och $\mathbf{S}_2$ vara ytorna $z = 8 - x^2 + y^2$ och $z = x^2 + 3y^2$.

   a. Beräkna volymen av den kropp som begränsas av $\mathbf{S}_1$ och $\mathbf{S}_2$. (4p)

   b. Vektorfältet $\boldsymbol{F} = (xy + z,\ y - y^2,\ x + yz)$ beskriver ett flöde genom den kropp som begränsas av ytorna $\mathbf{S}_1$ och $\mathbf{S}_2$. Beräkna det totala flödet ut från kroppen. (4p)

v.g.v

8. Låt $\boldsymbol{F} = (xy^2, yz^2, zx^2)$. Ange vilka av följande uttryck som har mening och beräkna dem: div rot $\boldsymbol{F}$, rot div $\boldsymbol{F}$, grad rot rot $\boldsymbol{F}$, grad grad div $\boldsymbol{F}$. (6p)

9. Betrakta vektorfältet $\boldsymbol{F} = (3x^2 + y, 3y^2 + x)$.

   a. Visa att $\boldsymbol{F}$ är konservativt i xy–planet. (2p)

   b. Bestäm en potential till $\boldsymbol{F}$. (4p)

   c. Beräkna linjeintegralen $\int_\Gamma (3x^2 + y)\,dx + (3y^2 + x)\,dy$ då Γ går från $(0,0)$ till $(1, 2)$ längs kurvan $2x^2 - xy + 2x - y = 0$. (2p)

10. En partikel färdas i planet så att dess acceleration vid tiden t är $\boldsymbol{a}(t) = \left(1, \frac{1}{\sqrt{t}}\right)$.

    Partikelns hastighet vid tiden $t = 1$ är $\boldsymbol{v}(1) = (0,2)$. Hur lång bana genomlöper partikeln under tidsintervallet $1 \le t \le 3$? (7p)

11. Undersök om hela ytan $z = y - 2x + \sqrt{20 - 3x^2 - y^2}$ ligger på samma sidan av planet $z = x + 2y - 13$. (7p)

12. Den maximala arean för en triangel vars hörn ligger på en cirkel antas för en liksidig triangel. Vilken är den maximala arean av en triangel vars hörn ligger på ellipsen $a^2x^2 + b^2y^2 = 1$? (8p)

Lycka till!