KTH Institutionen för Matematik
Olof Heden, Bronislaw Krakus, Harald Lang, Jan Olov Strömberg

Kortfattade lösningsförslag till tentamen i Differential- och Integralkalkyl II, del 2 (5B1103 del 2) 2000-03-07

---

1. En normal till tangentplanet är $\mathrm{grad}(2x^2y + 3xyz + xz^2) =$ $(4xy + 3yz + z^2, 2x^2 + 3xz, 3xy + 2xz) = (8, 5, 5)$ för $(x, y, z) = (1, 1, 1)$. Alltså är en ekvation för tangentplanet $\underline{\underline{8(x-1) + 5(y-1) + 5(z-1) = 0.}}$

2. Lagrange-funktionen för detta problem är $\mathcal{L} = x+y+z-\lambda(2x^2+3y^2+6z^2-36)$. Kritiska punkter ges alltså av
$$\begin{aligned} 1 - 4\lambda x &= 0 \\ 1 - 6\lambda y &= 0 \\ 1 - 12\lambda z &= 0 \end{aligned}$$
som ger $(x, y, z) = \left(\frac{1}{4\lambda}, \frac{1}{6\lambda}, \frac{1}{12\lambda}\right)$. Insatt i $2x^2 + 3y^2 + 6z^2 = 36$ ger detta $\lambda = \pm 1/12$. För $\lambda = 1/12$ får vi $(x, y, x) = (3, 2, 1)$ och funktionsvärdet $f = 3 + 2 + 1 = 6$ och för $\lambda = -1/12$ får vi $(x, y, x) = (3, 2, 1)$ och funktionsvärdet $f = -3-2-1 = -6$. $\underline{\underline{\text{Största värdet för } f \text{ är alltså 6 som antas i}}}$ $\underline{\underline{(3, 2, 1),\ \text{minsta värdet är } -6 \text{ som antas i } (-3, -2, -1).}}$

3.
$$\begin{aligned} u'_x &= e^{x+y} = u & v'_x &= e^{x-y} = v \\ u'_y &= e^{x+y} = u & v'_y &= -e^{x-y} = -v \end{aligned}$$
Alltså $z'_x = z'_u u'_x + z'_v v'_v = z'_u u + z'_v v$. Derivering m.a.p. y ger nu (eftersom $z''_{uv} = z''_{vu}$)
$$\begin{aligned} z''_{xy} &= (z''_{uu}u'_y + z''_{uv}v'_y)u + z'_u u'_y + (z''_{vu}u'_y + z''_{vv}v'_y)v + z'_v v'_y \\ &= \underline{\underline{z''_{uu}u^2 - z''_{vv}v^2 + z'_u u - z'_v v}} \end{aligned}$$

4. Kritiska punkter ges av
$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial x} xye^{-x^2-y^2} = ye^{-x^2-y^2}(1-2x^2) \\ 0 &= \frac{\partial}{\partial y} xye^{-x^2-y^2} = xe^{-x^2-y^2}(1-2y^2) \end{aligned} \qquad \text{d.v.s.} \qquad \begin{aligned} y(1-2x^2) &= 0 \\ x(1-2y^2) &= 0 \end{aligned}$$
som ger $(x, y) = (0, 0)$, $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})$, $(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})$. Nu är $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (4x^3y - 6xy)e^{-x^2-y^2}$, $B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (4x^2y^2 - 2x^2 - 2y^2 + 1)e^{-x^2-y^2}$, $C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (4xy^3 - 6xy)e^{-x^2-y^2}$. Vi ser att för $(x, y) = (0, 0)$ är $Ah^2 + 2Bhk + Ck^2 = 2hk$ som är indefinit, alltså sadelpunkt. För $(x, y) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ och $(x, y) = (\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})$ är $Ah^2 + 2Bhk + Ck^2 = -2e^{-1}h^2 - 2e^{-1}k^2$ som är negativt definit; alltså lokala maximipunkter. För $(x, y) = (\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ och $(x, y) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}})$ är

$Ah^2 + 2Bhk + Ck^2 = 2e^{-1}h^2 + 2e^{-1}k^2$ som är positivt definit; alltså lokala minimipunkter.

5. Vi gör variabelsubstitutionen

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = 3x + y \end{cases} \qquad \text{dvs.} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{1}{2}v - \dfrac{1}{2}u \\ y = \dfrac{3}{2}u - \dfrac{1}{2}v \end{cases}$$

alltså $$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \pm \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$

Alltså $\displaystyle\iint e^x \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_2^4 \int_1^3 e^{v/2-u/2}\, \frac{1}{2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_2^4 (e^{v/2-1/2} - e^{v/2-3/2})\,\mathrm{d}v =$ $\underline{\underline{2e^{3/2} - 4e^{1/2} + 2e^{-1/2}}}$

6. Vi ansätter en potentialfunktion $U(x,y,x)$. $U'_x = 2y^2 \iff U(x,y,x) = 2y^2x + V(y,z)$. Nu ger $U'_y = 4xy + y^2z^2$ att $V'_y = y^2z^2 \iff V(y,z) = \frac{1}{3}y^3z^2 + W(z)$, alltså $U(z,y,z) = 2y^2x + \frac{1}{3}y^3z^2 + W(z)$. Slutligen ger nu $U'_z = \frac{2}{3}y^3z$ att $W'(z) = z \iff W(z) = \frac{1}{2}z^2 + C$. Således är $\underline{\underline{U(x,y,z) = 2y^2x + \frac{1}{3}y^3z^2 + \frac{1}{2}z^2}}$ en potentialfunktion, vilket vi också lätt verifierar. <u>Eftersom fältet har en potentialfunktion är det konservativt.</u>

7. Vi parametriserar kurvan med y. $x = 1/y \Longrightarrow \mathrm{d}x = -\mathrm{d}y/y^2$. Alltså $\displaystyle\int -xy^3\mathrm{d}x + 2x^2y\mathrm{d}y = \int_1^3 (\frac{2}{y} + 1)\mathrm{d}y = \underline{\underline{2\ln(3) + 2}}.$

8. Randkurvan till $\mathbf{S}$ är $\gamma =$ enhetscirkeln $x^2 + y^2 = 1,\ z = 1$ genomlöpt i positiv led sedd "uppifrån" (stort z-värde.) På denna kurva är $\mathbf{F} = (0, y, 1)$. Alltså är enligt Stokes' sats <u>integralen</u> $= \displaystyle\int_\gamma \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_\gamma y\,\mathrm{d}y = \underline{\underline{0}}$. Den sista likheten fås t.ex. av att $y\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}(y^2/2)$ är en exakt differential och γ en sluten kurva.

9a. För $x = y^2$ är $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy^2)}{x^2 + y^4} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin y^4}{2y^4} = \frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}.$

9b. Uppenbarligen gäller $\displaystyle\lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{\sin(xy^2)}{x^2 + y^4} = 0$, dvs. gränsvärdet då man närmar sig origo längs x-axeln (och även y-axeln) $= 0$. Eftersom gränsvärdet längs parabeln i a) ger ett annat värde, <u>existerar inte det givna gränsvärdet.</u>

10. Vi parametriserar ytan henom att ge z som en funktion av x och y: $z = 2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y,\ x^2 + y^2 \leq 1$. Plattans totala massa är $\displaystyle\iint z\mathrm{d}\mathbf{S}$. Nu är $\mathrm{d}\mathbf{S} = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\sqrt{14}}{3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Alltså är massan

$\iint (2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y)\, \frac{\sqrt{14}}{3}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, där integralen tas över enhetscirkeln. Av symmetriskäl blir integralen av x-termen $= 0$ och likaså y-termen. Kvar blir alltså $2\frac{\sqrt{14}}{3}$ gånger engetscirkelns area $= \underline{\underline{2\pi\frac{\sqrt{14}}{3}}}$.

11. Definiera $F(x, y, u, v) = e^x + xy + e^y - u, \;\; G(x, y, u, v) = x^3 - x + y + y^3 - v$. Vi har för $(x, y, u, v) = (0, 0, 2, 0)$

$$\begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Enligt satsen om implicita funktioner definierar därför de givna ekvationerna x och y som funktioner av u och v i närheten av $(x, y, u, v) = (0, 0, 2, 0)$: $x = x(u, v), \;\; y = y(u, v)$. Uppenbarligen är $x(2, 0) = 0$ och $y(2, 0) = 0$. Om $(x, y, 2, 0)$ är en lösning till de givna ekvationerna där (x, y) ligger i en tillräckligt liten omgivning av $(0, 0)$ gäller alltså att $(x, y, 2, 0) = (x(2, 0), y(2, 0), 2, 0) = (0, 0, 2, 0)$, *Q.E.D.*

12. Enligt riktningsderivatans definition är

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}_{\bar{v}} f(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h\cos a, h\sin a) - f(0,0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h^3 \sin^3 a}{h(h^2\cos^2 a + h^2 \sin^2 a)} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3 \sin^3 a}{h^3} \\
&= \sin^3 a
\end{aligned}$$

Detta visar att riktningsderivatan existerar. Speciellt får vi för $a = 0$ respektive $a = \pi/2$ $\; f'_x(0, 0) = 0, \; f'_y(0, 0) = 1$. Om nu f vore differentierbar i origo, så skulle $\mathbf{D}_{\bar{v}} f(0, 0) = \big(f'_x(0, 0), f'_y(0, 0)\big) \cdot (\cos a, \sin a) = \sin a$ vilket vi ser av kalkylen ovan inte gäller. <u>Alltså är f inte differentierbar i origo.</u>