KTH Institutionen för Matematik
Olof Heden, Bronislaw Krakus, Harald Lang, Jan Olov Strömberg

Kortfattade lösningar 5B1103 (Differential- och Integralkalkyl II)
TEN 2 den 2 maj 2000 kl. 14.00–19.00.

---

1. Vi har $x = r\cos\theta$, $\quad y = r\sin\theta$. Uttrycket $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y}$ måste i polära koordinater vara ett uttryck i r, θ, $\dfrac{\partial f}{\partial \theta}$ och $\dfrac{\partial f}{\partial r}$. Vi beräknar därför
$\dfrac{\partial f}{\partial \theta} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial \theta} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial \theta} = \dfrac{\partial f}{\partial x} r(-1)\sin\theta + \dfrac{\partial f}{\partial y} r\cos\theta = -y\dfrac{\partial f}{\partial x} + x\dfrac{\partial f}{\partial y}$ och
$\dfrac{\partial f}{\partial r} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial r} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial r} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \dfrac{\partial f}{\partial y}\sin\theta = \dfrac{x}{r}\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{y}{r}\dfrac{\partial f}{\partial y}$. Vi ser alltså att den första uträkningen var överflödig, för den andra visar direkt att
$x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = r\dfrac{\partial f}{\partial r}$.

2. Vi har

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = -2\sin t\,\mathbf{i} + 2\cos t\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}$$

och
$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = -2\cos t\,\mathbf{i} + 2\sin t\,\mathbf{j}$$

alltså
$$\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t) = 6\sin t\,\mathbf{i} - 6\cos t\,\mathbf{j} + 4\,\mathbf{k}$$

som ger
$$|\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t)| = \sqrt{6^2\sin^2 t + 6^2\cos^2 t + 16} = \sqrt{52}$$

Dessutom är
$$|\dot{\mathbf{r}}(t)| = \sqrt{2^2\sin^2 t + 2^2\cos^2 t + 3^2} = \sqrt{13}$$

Alltså är
$$\underline{\underline{\kappa}} = \frac{\sqrt{52}}{13\sqrt{13}} = \underline{\underline{\frac{2}{13}}}.$$

3. I en gemensam tangeringspunkt måste de båda ytornas normaler vara parallella, alltså $(2x, 2y, 4z) = \lambda(y, x, 2z)$ för något tal λ. Detta gäller om.m. $\lambda = 2$ och $x = y$. Sätter vi in $y = x$ i ekvationen för ytorna får vi $2x^2 + 2z^2 = A$ respektive $x^2 + z^2 = 2$ och vi ser att detta ger att $\underline{\underline{A = 4}}$. (För detta värde på A tangerar ytorna varandra i alla punkter $(x, y, z) = (t, t, \pm\sqrt{2 - t^2})$, $|t| \le \sqrt{2}$.)

4. Vi undersöker dels inre kritiska punkter, dels randpunkter, dels vad som händer då $r = \sqrt{x^2 + y^2} \to \infty$. För inre kritiska punkter gäller

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{y}{1 + x^2 + y^2} = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{y}{1 + x^2 + y^2} = 0 \end{cases} \quad \text{dvs.} \quad \begin{cases} \dfrac{-2xy}{(1 + x^2 + y^2)^2} = 0 & (1) \\ \dfrac{1 + x^2 - y^2}{(1 + x^2 + y^2)^2} = 0 & (2) \end{cases}$$

Ekvation (1) ger $x = 0$ eller $y = 0$. Men $y = 0$ ger inte inre punkter, så vi tittar bara på $x = 0$ för ögonblicket. Ekvation (2) ger nu $y = 1$. Alltså, inre kritiska punkter är bara punkten $(0,1)$, och $f(0,1)=1$. Så till randpunkter, dvs $y=0$. För dessa gäller uppenbarligen $f(x,0)=0$. Slutligen ser vi att för $y \geq 0$ gäller att $0 \leq f(x,y) \leq \frac{r}{1+r^2} \to 0$ då $r \to \infty$, så $f(0,1)=1$ och $f(x,0)=0$ måste vara största respektive minsta värdet.

5. $\mathrm{d}f = \dfrac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \dfrac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y = \dfrac{8x-9y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x + \dfrac{9x+8y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y = 1.4\mathrm{d}x + 5.2\mathrm{d}y$ för $x=2,\ y=1$. För små värden på Δx och Δy gäller $f(2+\Delta x, 1+\Delta y) \approx f(2,1) + 1.4\Delta x + 5.2\Delta y$, och med $\Delta x = 0.1$ och $\Delta y = 0.05$ får vi $f(2.1, 1.05) \approx 10.61 + 0.14 + 0.26 = \underline{\underline{11.01.}}$

6. Vi får $\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{-y}{(x+y)^2} & \frac{x}{(x+y)^2} \end{vmatrix} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \dfrac{1}{x+y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \dfrac{1}{u}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, dvs. $\mathrm{d}x\mathrm{d}y = u\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$. Området D i xy-planet avbildas på rektangeln som begränsas av linjerna $u=1,\ u=2,\ v=0,\ v=1$ i uv-planet. Alltså
$$\iint_D e^{\frac{y}{x+y}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \Big(\int_1^2 u\,\mathrm{d}u\Big) e^v\,\mathrm{d}v = \underline{\underline{\frac{3}{2}(e-1)}}$$

7. En naturlig metod är att lösa ut z ur bivillkoret och substituera, och sedan maximera volymen över x och y. Det är dock något enklare att använda Lagranges multiplikatormetod. Vi skall maximera xyz under bivillkoret $5x+3y+z=45$, vilket ger
$$\begin{aligned} yz &= 5\lambda && (1)\\ xz &= 3\lambda && (2)\\ xy &= \lambda && (3)\\ 5x+3y+z &= 45 && (4) \end{aligned}$$
Vi substituerar $\lambda = xy$ från (3) i de övriga ekvationerna:
$$\begin{aligned} yz &= 5xy && (1')\\ xz &= 3xy && (2')\\ 5x+3y+z &= 45 && (4) \end{aligned}$$
Eftersom x och y måste vara positiva för en positiv volym ger detta
$$\begin{aligned} z &= 5x && (1'')\\ z &= 3y && (2'')\\ 5x+3y+z &= 45 && (4) \end{aligned}$$
Sätter vi in (1”) och (2”) i (4) får vi $3z=45$, dvs. $z=15$. Nu ger (1”) och (2”) omedelbart $x=3,\ y=5$. Maximala volymen är alltså $3\cdot 5\cdot 15 = \underline{\underline{225.}}$

8. Vi parametriserar kurvan; $x = 2\cos t,\ y = 2\sin t,\ z = 4\sin^2 t;\ 0 \leq t \leq 2\pi$. Detta ger $\displaystyle\int_C x\,\mathrm{d}z - y\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} (2\cos t \cdot 8\sin t\cos t - 2\sin t\cdot(-2)\sin t)\,\mathrm{d}t =$
$$\int_0^{2\pi} 16\cos^2 t\sin t + 4\sin^2 t\,\mathrm{d}t = \Big[-\frac{16}{3}\cos^3 t\Big]_0^{2\pi} + 2\Big[t - \sin t\cos t\Big]_0^{2\pi} = \underline{\underline{4\pi.}}$$

9. Ekvationerna kan skrivas

$$F(u,v,x,y) = v^3 - uv - x = 0$$
$$G(u,v,x,y) = 3uv + 2u^2 - y = 0$$

Implicita funktionssatsen säger att dessa definierar u och v som funktioner av x och y i närheten av P om $\begin{vmatrix} F'_u & F'_v \\ G'_u & G'_v \end{vmatrix} \neq 0$ i P. Men $\begin{pmatrix} F'_u & F'_v \\ G'_u & G'_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v & 3v^2 - u \\ 4u + 3v & 3u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ i P och determinanten för denna matris $= 1 \neq 0$. Alltså definierar ekvationerna u och v som funktioner av x och y i närheten av P. Nu har vi i punkten P (se Adams sid 758)

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

Speciellt ser vi att $\underline{\underline{\frac{\partial u}{\partial x} = 6}}$ och $\underline{\underline{\frac{\partial u}{\partial y} = -1}}$ i P.

10. Vi använder Gauss' sats och får $\iint_S \mathbf{F} \bullet \widehat{\mathbf{N}}\, \mathrm{d}S = \iiint_K \operatorname{div} \mathbf{F}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_K z\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ där K är halvklotet $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \quad z \geq 0$. Vi beräknar trippelintegralen: $\int_0^1 z \Big(\iint_{x^2+y^2 \leq 1 - z^2} 1\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \Big)\, \mathrm{d}z = \int_0^1 z\pi(1 - z^2)\, dz = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}}}.$

11. Vi deriverar $f(y)$ två gånger och får $f''(y) = \int_0^\infty \frac{2\mathrm{d}x}{(y + x^2)^3}$. Å andra sidan är $f(y) = \Big[\frac{1}{\sqrt{y}} \arctan \frac{x}{\sqrt{y}} \Big]_{x=0}^{\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{y}}$, så $f''(y) = \frac{3\pi}{8y^{5/2}}$. Nu har vi $\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(1 + x^2)^3} = \frac{1}{2} f''(1) = \underline{\underline{\frac{3\pi}{16}}}.$