KTH Institutionen för Matematik
Olof Heden, Bronislaw Krakus, Harald Lang, Jan Olov Strömberg

Svar till Differential- och Integralkalkyl II del 2 (5B1103 del 2)
2000–08–30 kl 8.00 – 13.00

---

1. Låt $f(x, y.z) = x^3 + y^3 + z^3 + xz + 5y - 9$. $f(1, 1, 1) = 0$ och eftersom $\frac{\partial f}{\partial z} = 3z^2 + x = 4 \neq 0$ i punkten $(1, 1, 1)$ definierar ekvationen z som en entydigt bestämd funktion av x och y enligt implicita funktionssatsen. Differentiering ger $(3x^2 + z)\mathrm{d}x + (3y^2 + 5)\mathrm{d}y + (3z^2 + x)\mathrm{d}z = 0$, dvs $\mathrm{d}z = -\frac{3x^2+z}{3z^2+x}\mathrm{d}x - \frac{3y^2+5}{3z^2+x}\mathrm{d}y = -1\mathrm{d}x - 2\mathrm{d}y$ i punkten $(1, 1)$, alltså är $z'_x(1, 1) = -1$ och $z'_y(1, 1) = -2$. Riktningsderivatan är nu $z'_{\bar{v}} = (-1, -2) \cdot \frac{(4,3)}{\sqrt{4^2+3^2}} = -2$. $\boxed{\textbf{Svar: } -2.}$

2. Låt $f(x, y) = x^3 + 3x^2 - 6xy + y^2$. $\begin{cases} f'_x = 3x^2 + 6x - 6y = 0 \\ f'_y = 2y - 6x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$ eller $(4, 12)$. I punkten $(0, 0)$ fås $f''_{xx}f''_{yy} - (f''_{xy})^2 = -24 < 0 \Rightarrow$ sadelpunkt. I punkten $(4, 12)$ gäller $f''_{xx}f''_{yy} - (f''_{xy})^2 = 24 > 0 \Rightarrow$ extrempunkt, och $f''_{xx} = 30 > 0 \Rightarrow$ minimipunkt. $\boxed{\textbf{Svar: } \text{lokalt minimum i } (4, 12)}$

3. Eftersom $f(x, y) = 2x^3 - xy^2$ är kontinuerlig och den tillåtna mängden $x^2 + y^2 \leq 9$ är sluten och begränsad så antar f både ett största och ett minsta värde i mängden. Detta sker antingen i en inre kritisk punkt eller i en kritisk punkt på randen (några singulära punkter finns inte.)
Inre punkter: Dessa fås ur ekvationssystemet $f'_x = 6x^2 - y^2 = 0$, $f'_y = -2xy = 0$. Vi får punkten $(0, 0)$.
Randen: $x^2 + y^2 = 9 \Leftrightarrow y^2 = 9 - x^2$, $|x| \leq 3$. Vi sätter in detta i uttrycket för f: $f(x, y) = 2 - x^3 - x(9 - x^2) = 3x^3 - 9x \stackrel{\text{def}}{=} h(x)$ och ur ekvationen $0 = h'(x) = 9x^2 - 9$ får vi $x = \pm 1$ svarande mot punkterna $(1, \pm\sqrt{8})$, $(-1, \pm\sqrt{8})$. Sammanfattningsvis får vi punkterna $(0, 0)$, $(1, \pm\sqrt{8})$, $(-1, \pm\sqrt{8})$ samt punkterna $(\pm 3, 0)$ svarande mot ändpunkterna på intervallet $|x| \leq 3$. I dessa punkter antar f värdena 0, -6, 6, 54 och -54.; alltså

$\boxed{\textbf{Svar: } \text{Största värdet} = 54, \text{ minsta värdet} = -54.}$

4. Ytorna skär varandra längs kurvan $\begin{cases} z = 8 - x^2 + y^2 \\ z = x^2 + 3y^2 \end{cases}$. Kurvans projektion på xy-planet fås genom att eliminera z ur systemet, vilket ger $x^2 + y^2 = 4$, dvs. en cirkel med centrum i origo och radien 2.

a) Om $\mathcal{D}$ betecknar området inom cirkeln får vi volymen $= \iint_{\mathcal{D}} (8 - x^2 + y^2 - x^2 - 3y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint_{\mathcal{D}} (4 - x^2 - y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$ [polära koordinater] $= 2\iint_{\substack{0\le r\le 2\\ 0\le v\le 2\pi}} (4 - r^2)r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}v = 4\pi \int_0^2 (4r - r^3)\,\mathrm{d}r = 16\pi$. $\boxed{\textbf{Svar: } 16\pi.}$

b) Låt $\mathbf{S}$ vara $\mathbf{S}_1 \cup \mathbf{S}_2$ och $\mathbf{N}$ den utåtriktade enhensnormalen. $\iint_{\mathbf{S}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\mathrm{d}S = \iiint_V \mathrm{div}\mathbf{F}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_V 1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$ volymen av $V = 16\pi$ enligt a). $\boxed{\textbf{Svar: } 16\pi.}$

c) Låt $\bar{N} = (n_1, n_2, n_3)$ vara enhetsnormalen till $\mathbf{S_1}$ med positiv z-komponent. $\oint_\gamma \bar{G}(\bar{r})\cdot\mathrm{d}\bar{r} = \iint_{\mathbf{S_1}} \mathrm{rot}\,\bar{G}(\bar{r})\cdot\bar{N}\,\mathrm{d}S = \iint_{\mathbf{S_1}} (0,0,1)\cdot\bar{N}\,\mathrm{d}S = \iint_{\mathbf{S_1}} n_3\,\mathrm{d}S = \iint_{\mathcal{D}} 1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \mathcal{D}$:s area $= 4\pi$. $\boxed{\textbf{Svar: } 4\pi.}$

5. Taylorutveckling: $\sin t = t + h(t)t^3$ där $h(t)$ är en begränsad funktion i närheten av $t = 0$, alltså, med $\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} h(t)t$, $\sin t = t + \varepsilon t^2$ där $\varepsilon \to 0$ då $t \to 0$. Alltså gäller att $f(x,y) = 1 + \varepsilon x + \varepsilon y = f(0,0) + \varepsilon x + \varepsilon y$ där $\varepsilon \to 0$ då $(x,y) \to (0,0)$. Detta visar att $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$ och att f är differentierbar i origo.

6. Vi parametriserar γ genom $x = -\cos t,\ y = 2\sin t,\ 0 \le t \le \pi$.

$$\int_\gamma (2x - y + 1)\,\mathrm{d}x + (x + 3y + 2)\,\mathrm{d}y$$
$$= \int_0^\pi \big[(-2\cos t - 2\sin t + 1)\sin t + (-\cos t + 6\sin t + 2)2\cos t\big]\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^\pi (10\sin t\cos t + 4\cos t + \sin t - 2)\,\mathrm{d}t = \big[5\sin^2 t - 4\sin t - \cos t - 2t\big]_0^\pi$$
$= 2 - 2\pi$. $\boxed{\textbf{Svar: } 2 - 2\pi.}$

7a) Vi prövar att hitta en potentialfunktion $f(x,y,z)$. $f'_x = xy - \sin z \Rightarrow f(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2y - x\sin z + \phi(y,z)$. Nu ger $f'_y = \frac{1}{2}x^2 + ze^y$ att $\frac{1}{2}x^2 + \phi'_y(y,z) = \frac{1}{2}x^2 + ze^y \Rightarrow \phi(y,z) = ze^y + \psi(z) \Rightarrow f(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2y - x\sin z + ze^y + \psi(z)$. Slutligen ger nu $f'_z = e^y - x\cos z - \sin z$ att $-x\cos z + e^y + \psi'(z) = e^y - x\cos z - \sin z \Rightarrow \psi(z) = \cos z +$ konstant $\Rightarrow f(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2y - x\sin z + ze^y + \cos z +$ konstant. Vi väljer konstanten $= 0$ och kontrollerar att för $f(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2y - x\sin z + ze^y + \cos z$ gäller att grad $f = \bar{F}$. Alltså är vektorfältet konservativt, och vi har hittat en potentialfunktion f. $\boxed{\textbf{Svar: } \frac{1}{2}x^2y - x\sin z + ze^y + \cos z.}$

7b) Eftersom det finns en potentialfunktion till fältet är integralen oberoende av integrationsväg, och $= f(1,2,\pi) - f(0,0,0) = \pi e^2 - 1$. $\boxed{\textbf{Svar: } \pi e^2 - 1.}$

8. Se bokan (Adams, 4:e upplagan), ex.2 kap 13:5. $\boxed{\textbf{Svar: } \ln(y/x).}$

9. Vi har partikelns hastighet vid tiden t $\bar{v}(t) = (t + c_1, 2\sqrt{t} + c_2)$ för några konstanter c_1, c_2. Eftersom $\bar{v}(1) = (0, 2)$ är $v(t) = (t - 1, 2\sqrt{t})$. Den aktuella kurvans längd ges av $\int_1^3 |\bar{v}|\, \mathrm{d}t = \int_1^3 \sqrt{(t-1)^2 + (2\sqrt{t})^2}\, \mathrm{d}t = \int_1^3 (t+1)\mathrm{d}t = 6.$

$\boxed{\textbf{Svar: } 6.}$

10. Geometriskt kan vi tänka oss att vi lutar på ellipsen och projicerar på ett plan så att projektionen blir en cirkel, osv. Analytiskt gör vi så att vi tänjer ut (eller trycker ihop) den ena axelriktningen: sätt $u = (a/b)x$, $v = y$. Då är för varje yta S i xy-planet arean av $S = \iint_S \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \iint_{S'} \left|\frac{\mathrm{d}(u,v)}{\mathrm{d}(x,y)}\right| \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{S'} (a/b)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = (a/b) \cdot$ arean av S', där S' är bilden av S i uv-planet. Eftersom avbildningen från xy- till uv-planet är linjär (det är bara en skalförändring av x-axeln) blir bilden av en triangel en ny triangel – räta linjer avbildas på räta linjer. Ellipsen avbildas på cirkeln $u^2 + v^2 = 1/b^2$. Den största triangelarean erhålles då bilden i uv planet är en liksidig triangel, och då är arean $\frac{3\sqrt{3}}{4b^2}$ och triangelns på ellipsen area (i xy-planet) $\frac{b}{a}\frac{3\sqrt{3}}{4b^2} = \frac{3\sqrt{3}}{4ab}$. $\boxed{\textbf{Svar: } \frac{3\sqrt{3}}{4ab}.}$