KTH Institutionen för Matematik
Olof Heden, Bronislaw Krakus, Harald Lang, Jan Olov Strömberg

Tentamen i Differential- och Integralkalkyl II del 2 (5B1103 del 2)
2000–03–07 kl 8.00 – 13.00

Inga hjälpmedel. Med bonuspoäng (max. 4) blir totalsumman 39 poäng.
Betygsgränser: 16p för betyget 3, 24p för betyget 4, 31p för betyget 5.
OBS! *Lösningar skall förklaras, beteckningar (som inte är standard) skall införas och alla svar noggrant motiveras.*

---

1. Bestäm en ekvation för tangentplanet till ytan $2x^2y + 3xyz + xz^2 = 6$ i punkten $(1, 1, 1)$. (2p)

2. Bestäm största och minsta värdet som funktionen $f(x, y, z) = x+y+z$ antar på ytan $2x^2 + 3y^2 + 6z^2 = 36$. (3p)

3. Låt $z(x, y)$ vara en funktion av de två variablerna x och y. Man inför nu nya oberoende variabler u, v genom $u = e^{x+y}$, $v = e^{x-y}$. Bestäm andraderivatan z''_{xy} uttryckt i de nya variablerna (dvs. i u och v och derivator map. u och v.) (3p)

4 Bestäm och karakterisera alla kritiska punkter till funktionen $f(x, y) = xye^{-x^2-y^2}$. (3p)

5. Beräkna dubbelintegralen $\iint e^x \, dx \, dy$ över parallellogrammen som begränsas av linjerna $x + y = 1$, $x + y = 3$, $3x + y = 2$, $3x + y = 4$. (3p)

6. Visa att vektorfältet $\mathbf{F} = (2y^2, 4xy + y^2z^2, \frac{2}{3}y^3z + z)$ är konservativt, och bestäm en potentialfunktion till $\mathbf{F}$. (2p)

7. Beräkna linjeintegralen $\int -xy^3 \, dx + 2x^2y \, dy$ längs kurvan $xy = 1$ från $(1, 1)$ till $(\frac{1}{3}, 3)$. (3p)

8. Låt $\mathbf{F} = \big(y(1 - x^2 - y^2)^{4/3}, y, z\big)$. Använd Stokes sats för att beräkna flödesintegralen $\iint_{\mathbf{S}} \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \widehat{\mathbf{N}} \, dS$ då $\mathbf{S}$ är den del av planet $z = 1$ som ligger inom paraboloiden $z = x^2 + y^2$. Enhetsnormalen $\widehat{\mathbf{N}}$ har positiv z-komponent. (rot heter curl på engelska). (2p)

9. a) Beräkna gränsvärdet av $\dfrac{\sin(xy^2)}{x^2 + y^4}$ då $(x, y) \to (0, 0)$ längs kurvan $x = y^2$. (1p)

   b) Avgör om gränsvärdet $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy^2)}{x^2 + y^4}$ existerar och bestäm det i så fall. (2p)

10. En tunn platta som ges av $x^2 + y^2 \leq 1$, $x + 2y + 3z = 6$ har masstätheten z per ytenhet i varje punkt (x, y, z) på plattan. Bestäm plattans totala massa. (3p)

Fortsättning ...

11. Ekvationerna $\begin{cases} e^x + xy + e^y - u = 0 \\ x^3 - x + y + y^3 - v = 0 \end{cases}$ har som synes bl.a. lösningen $(x, y, u, v) = (0, 0, 2, 0)$. Visa att i en tillräckligt liten omgivning av $(x, y) = (0, 0)$ finns ingen annan lösning som uppfyller $(u, v) = (2, 0)$. (3p)

12. Låt $f(x, y) = \dfrac{y^3}{x^2 + y^2}$ för $(x, y) \neq (0, 0)$ och $f(0, 0) = 0$.
Använd riktningsderivatans definition för att visa att $\mathbf{D}_{\bar{v}} f(0, 0)$ existerar för varje riktning $\bar{v} = (\cos a, \sin a)$ och ange dess värde uttryckt i a.

Undersök även om f är differentierbar i origo. (5p)