KTH Institutionen för Matematik
Olof Heden, Bronislaw Krakus, Harald Lang, Jan Olov Strömberg

Tentamen i 5B1103 (Differential- och Integralkalkyl II) TEN 2
den 2 maj 2000 kl. 14.00–19.00.

Inga hjälpmedel. Med bonuspoäng (max. 4) blir totalsumman 39 poäng.
Betygsgränser: 16p för betyget 3, 24p för betyget 4, 31p för betyget 5.
OBS! *Lösningar skall förklaras, beteckningar (som inte är standard) skall införas och alla svar noggrant motiveras.* **Lösningsförslag finns på nätet.**

---

1. Låt $f(x,y)$ vara en kontinuerligt deriverbar funktion. Vi inför polära koordinater (r,θ) : $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. Vad blir uttrycket $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y}$ uttryckt i de polära koordinaterna? (2p)
2. Bestäm krökningen i varje punkt av kurvan $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\,\mathbf{i} + 2\sin t\,\mathbf{j} + 3t\,\mathbf{k}$. (2p)
3. Bestäm konstanten A så att något plan tangerar ytorna $x^2 + y^2 + 2z^2 = A$ och $xy + z^2 = 2$ i samma punkt. (3p)
4. Finn största och minsta värdet av funktionen $f(x,y) = \dfrac{y}{1+x^2+y^2}$ i övre halvplanet $y \geq 0$. Ange också i vilka punkter dessa värden antas och visa att de verkligen är globala max- och minpunkter. (3p)
5. Bestäm differentialen av funktionen $f(x,y) = 9\arctan(\dfrac{y}{x}) + 4\ln(x^2+y^2)$ i punkten $(x,y) = (2,1)$. Det gäller att $f(2,1) \approx 10.61$. Använd differentialen för att beräkna ett närmevärde till $f(2.1, 1.05)$. (3p)
6. Beräkna $\displaystyle\iint_D e^{\frac{y}{x+y}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ där D begränsas av linjerna $x+y=1$, $x+y=2$, $x=0$ och $y=0$, genom att sätta $u = x+y$, $v = \frac{y}{x+y}$. (4p)
7. Finn den maximala volymen av en rektangulär låda med sidor parallella med koordinatplanen och som ligger i första oktanten med ett hörn i origo och det diagonalt motsatta på planet $5x + 3y + z = 45$ (3p)
8. Beräkna kurvintegralen $\displaystyle\int_C x\,\mathrm{d}z - y\,\mathrm{d}x$ längs den slutna kurvan C som är skärningen mellan cylindrarna $z = y^2$ och $x^2 + y^2 = 4$ orienterad moturs sett långt bort från positiva z-axeln. (3p)
9. Visa att ekvationerna $x = v^3 - uv$, $y = 3uv + 2u^2$ definerar u och v som funktioner av x och y i närheten av punkten $P = (u,v,x,y) = (2,-1,1,2)$. Vad blir $\partial u/\partial x$ och $\partial u/\partial y$ i punkten P? (4p)
10. Beräkna flödesintegralen $\displaystyle\iint_S \mathbf{F} \bullet \widehat{\mathbf{N}}\,\mathrm{d}S$ där $\mathbf{F} = xz\,\mathbf{i} + xye^{yz}\,\mathbf{j} - xze^{yz}\,\mathbf{k}$ och S är den slutna yta som begränsas av halvsfären $x^2+y^2+z^2=1$, $z \geq 0$ och xy-planet $z=0$ och $\widehat{\mathbf{N}}$ är den enhetsnormal som pekar ut från halvklotet. (3p)
11. Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^3}$ genom att studera funktionen $f(y) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(y+x^2)}$. (5p)