KTH Institutionen för Matematik
Olof Heden, Bronislaw Krakus, Harald Lang, Jan Olov Strömberg

Tentamen i Differential- och Integralkalkyl II del 2 (5B1103 del 2)
2000–08–30 kl 8.00 – 13.00

Inga hjälpmedel. Med bonuspoäng (max. 4) blir totalsumman 39 poäng.
Betygsgränser: 16p för betyget 3, 24p för betyget 4, 31p för betyget 5.
OBS! *Lösningar skall förklaras, beteckningar (som inte är standard) skall införas och alla svar noggrant motiveras.*

---

1. Visa att ekvationen $x^3 + y^3 + z^3 + xz + 5y = 9$ definierar i närheten av punkten $(x, y) = (1, 1)$ precis en funktion $z = z(x, y)$ så att $z(1, 1) = 1$. Beräkna riktningsderivatan $z'_{\bar{v}}(1, 1)$ i riktningen av vektorn $\bar{v} = (4, 3)$. (3p)

2. Bestäm samtliga lokala maxima och minima till funktionen $f(x, y) = x^3 + 3x^2 - 6xy + y^2$. (2p)

3. Bestäm största och minsta värdet av $f(x, y) = 2x^3 - xy^2$ i området $x^2 + y^2 \leq 9$. (2p)

4. Låt $\mathbf{S}_1$ och $\mathbf{S}_2$ vara ytorna $z = 8 - x^2 + y^2$ och $z = x^2 + 3y^2$

a) Beräkna volymen av den kropp V som begränsas av ytorna $\mathbf{S}_1$ och $\mathbf{S}_2$ (2p)

b) Vektorfältet $\mathbf{F} = (z + xy, y - y^2, x + yz)$ beskriver ett flöde genom den kropp som begränsas av ytorna $\mathbf{S}_1$ och $\mathbf{S}_2$. Beräkna det totala flödet ut från kroppen. (2p)

c) Beräkna linjeintegralen $\oint_\gamma \bar{G}(\bar{r}) \cdot d\bar{r}$ där $\bar{G} = (ze^{xz}, x, xe^{xz})$, $\bar{r} = (x, y, z)$ och γ är kurvan längs skärningen mellan ytorna $\mathbf{S}_1$ och $\mathbf{S}_2$ orienterad så att dess projektion på xy−planet går moturs. (2p)

5. Visa att funktionen $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x+y)}{x+y} & x + y \neq 0 \\ 1 & x + y = 0 \end{cases}$ är differentierbar i origo. (3p)

6. Beräkna linjeintegralen $\int_\gamma (2x - y + 1)\, dx + (x + 3y + 2)\, dy$ där γ är kurvan från $(-1, 0)$ till $(1, 0)$ längs ellipsen $4x^2 + y^2 = 4$ i övre halvplanet $(y \geq 0)$. (4p)

7. Betrakta vektorfältet $\bar{F} = (xy - \sin z, \frac{1}{2}x^2 + ze^y, e^y - x\cos z - \sin z)$

a) Visa att $\bar{F}$ är konservativt och finn en potentialfunktion. (3p)

b) Beräkna integralen $\int_\gamma \bar{F}(\bar{r}) \cdot d\bar{r}$ då γ går från $(0, 0, 0)$ till $(1, 2, \pi)$ längs kurvan $2x^2 - xy + 2x - y = 0,\ z = \pi x$. (2p)

forts ...

8. Beräkna $F(x,y) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-xt} - e^{-yt}}{t}\,\mathrm{d}t$ för $x > 0,\ y > 0$ genom att betrakta F :s derivator. (3p)

9. En partikel färdas i planet så att dess acceleration vid tiden t är $\bar{a}(t) = (1, \frac{1}{\sqrt{t}})$. Partikelns hastighet vid tiden $t = 1$ är $\bar{v}(1) = (0, 2)$. Hur lång bana genomlöper partikeln under tidsintervallet $1 \leq t \leq 3$? (3p)

10. Den maximala arean för en triangel vars hörn ligger på en cirkel antas för en liksidig triangel.

Vilken är den maximala arean av en triangel vars hörn ligger på ellipsen $a^2x^2 + b^2y^2 = 1$? (4p)