Institutionen för Matematik, KTH
Karim Daho och Ari Laptev

Tentamen i 5B1201 Komplex analys för E,F och T,
00–12–19, klockan 14–19.

- Inga hjälpmedel.
- Ange dina bonuspoäng på omslaget.
- Uppgifterna nedan är tillsammans värda 35 poäng, vilket betyder att man med bonuspoängen maximalt kan få 35+4=39 poäng.
- *Normalt* används följande betygsgränser: 16–21 p ger betyget 3, 22-27 p ger betyget 4 och 28–39 p ger betyget 5. *Observera dock* att dessutom kan helhetsintrycket påverka betyget—uppåt eller nedåt.
- Varje lösning skall åtföljas av förklarande text och/eller figur. Alla räkningar skall redovisas. I den mån man använder sig av kända satser, så skall förutsättningarna för dessa anges.

1. Den analytiska funktionen $f(z)$ uppfyller
$$\operatorname{Re} f(x+iy) = e^{2y}\cos 2x + x \quad \text{och} \quad f(0) = 1.$$
Bestäm $f(z)$ som funktion av $z(= x+iy)$. (5p)

2. Låt $\sqrt{z}$ beteckna principalgrenen av $z^{1/2}$, fastlagd genom att $\sqrt{1} = 1$ och låt
$$f(z) = 2\cos\sqrt{z}.$$
Beräckna $f'(-i\pi^2/2)$ på formen $a+ib$. (5p)

3. Utveckla funktionen
$$f(z) = \frac{1}{z^2-1}$$
i en Laurentserie i området $1 < |z-2| < 3$. (4p)

4. Beräkna integralen

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+\cos t}\,dt$$

där $a > 1$. (4p)

5. (a) Låt $a > 1$. Hur många rötter har ekvationen

$$z\,e^{a-z} = 1$$

i område $|z| < 1$? (2p)

(b) Bestäm antalet av lösningar i vänstra halvplanet till ekvationen

$$z^5 + (1+i)\,z + 2 = 0.$$

(4p)

6. Beräkna integralen

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(tx)}{(1+x^2)^2}\,dx.$$

för alla reella t. (6p)

7. Antag att $f(z)$ är analytisk i en omgivning av cirkelskivan $|z| \le R$ och att $|f(z)| \le M$ där. Bevisa att

$$f^{(n)}(z)| \le \frac{M\,R\,n!}{(R-|z|)^{n+1}}$$

för varje $z \in \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$. (5p)

Lycka till!