Institutionen för Matematik, KTH
Karim Daho och Ari Laptev

Lösningsförslag till Tentamenskrivning på kursen 5B1201, Komplex analys för E,F och T, 00–12–19, klockan 14–19.

Tal 1. Låt $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, där $u = \operatorname{Re} f$ och $v = \operatorname{Im} f$. Cauchy-Riemanns ekvationer ger

$$v'_y = u'_x = -2e^{2y}\sin 2x + 1 \quad \Longrightarrow \quad v(x,y) = -e^{2y}\sin 2x + y + h(x)$$

$$u'_y = 2e^{2y}\cos 2x = -v'_x = 2\,e^{2y}\cos 2x - h'(x) \quad \Longrightarrow \quad h(x) = k,$$

där k är en reell konstant. Därför

$$f(x+iy) = e^{2y}\cos 2x + x + i(-e^{2y}\sin 2x + y + k)$$

$$= e^{2y}(\cos 2x - i\sin 2x) + (x+iy) + ik = e^{2y}e^{-i2x} + z + ik.$$

Villkoren $f(0) = 1$ ger $k = 0$.

Svar: $f(z) = e^{-2iz} + z$.

Tal 2. Låt $S = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x \le -1\}$ och betrakta domänen $\Omega = \mathbb{C} \setminus S$. På Ω är $z^{1/2}$ en-entydig och analytisk funktion.

$$z^{1/2} = |z|^{1/2} e^{\frac{i}{2}(\arg z + 2\pi i n)},$$

$$\sqrt{1} = 1 \quad \Longrightarrow \quad n = 0 \Longrightarrow \quad z^{1/2} = |z|^{1/2} e^{\frac{i}{2}(\arg z}.$$

$$f'(z) = -\frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$$

Låt $z = -i\pi^2/2$.

$$\sqrt{-i\pi^2/2} = e^{\frac{1}{2}\operatorname{Log}(-i\pi^2/2)} = e^{\frac{1}{2}\left(\ln\frac{\pi^2}{2} - i\frac{\pi}{2}\right)} = e^{\frac{1}{2}(2\ln\pi - \ln 2)}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}}\Big(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\Big) = \frac{\pi}{2}\,(1-i).$$

$$\sin\sqrt{z} = \frac{1}{2i}\Big(e^{i\frac{\pi}{2}(1-i)} - e^{-i\frac{\pi}{2}(1-i)}\Big) = \cosh\frac{\pi}{2}.$$

$$f'(-i\pi^2/2) = \frac{\cosh\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}(1-i)} = \frac{1+i}{\pi}\cosh\frac{\pi}{2}$$

Svar: $f'(-i\pi^2/2) = \frac{1}{\pi}\cosh\frac{\pi}{2} + \frac{i}{\pi}\cosh\frac{\pi}{2}$.

Tal 3. Vi använder den välkända serien

$$\frac{1}{1+w} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\, w^n, \qquad |w| < 1.$$

Vi har

$$\frac{1}{z^2-1} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}\Big).$$

Om $\left|\frac{1}{z-2}\right| < 1$, då $|z-2| > 1$, och

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{(z-2)+1} = \frac{1}{z-2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z-2}} = \frac{1}{z-2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z-2)^n}.$$

Om $\left|\frac{z-2}{3}\right| < 1$, då $|z-2| < 3$, och

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{3+(z-2)} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-2}{3}} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-2)^n}{3^n}.$$

Svar: $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-2)^n$,
där
$c_n = \frac{1}{2}(-1)^{1+n}$, $n = -1, -2, -3, \ldots$
och
$c_n = \frac{1}{2}(-3)^{-(n+1)}(z-2)^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

4. Låt

$$I := \int_0^{2\pi}\frac{1}{a+\cos t}\,dt = \int_0^{2\pi}\frac{1}{a+\frac{1}{2}\Big(e^{it}+e^{-it}\Big)}\,dt.$$

Vi användar substitutionen $z = e^{it}$, $dt = \frac{1}{i}\frac{dz}{z}$.

$$I = \frac{1}{i}\int_{|z|=1}\frac{1}{a+\frac{1}{2}(z+z^{-1})}\cdot\frac{dz}{z} = \frac{1}{i}\int_{|z|=1}\frac{2\,dz}{z^2+2az+1}.$$

Funktionen $z^2 + 2az + 1$ har två nollställen $z_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - 1}$ och p.g.a. $a > 1$, bara $z_1 = -a + \sqrt{a^2 - 1}$ ligger innanför $|z| = 1$.
Residusatsen ger att

$$I = \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{2\,dz}{z^2 + 2az + 1}$$

$$= 2\pi \mathrm{Res}\left[\frac{2}{z^2 + 2az + 1}, -a + \sqrt{a^2 - 1}\right] = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}.$$

Svar: $I = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$.

Tal 5.
a. Ekvationen $ze^{a-z} = 1$ är ekvivalent till ekvationen $f(z) = z - e^{z-a} = 0$. Låt $g(z) = z$ och $h(z) = -e^{z-a}$. På cirkeln $|z| = 1$ har vi

$$|g(z)| = |z| = 1, \qquad |h(z)| = |e^z|\, e^{-a} < e\, e^{-a} < 1, \quad a > 1.$$

Rouches sats ger då $f(z)$ har lika många nollställen som $g(z)$ innanför cirkeln $|z| = 1$, dvs ett nollställe.

Svar a: Ekvationen $ze^{a-z} = 1$ har ett nollställe innanför $|z| = 1$.

b. Betrakta halvcirkeln med radie R som ligger i vänstra halvplanet $C_R = \gamma_R + I_R$, där $\gamma_R = \{z : |z| = R, \mathrm{Re}\, z < 0\}$ och $I_R = \{z : \mathrm{Re}\, z = 0, -R \leq \mathrm{Im}\, z \leq R\}$. På γ_R har vi

$$f(z) = z^5 + (1+i)z + 2 = z^5\Big(1 + \frac{1+i}{z^4} + \frac{2}{z^5}\Big) = z^5(1 + p(z)).$$

Detta ger att $\arg\left(z^5(1 + p(z))\right) = 5 \arg z + \arg\left(1 + p(z)\right)$ och därför $\lim_{R\to\infty} \Delta_{\gamma_R} f(z) = 5\pi$.
Längs I_R har vi $f(iy) = -y + 2 + iy(y^4 + 1) = u + iv$. $u(y) = 0 \Longrightarrow y = 2$, $v(y) = 0 \Longrightarrow y = 0$.

$$\frac{|v(y)|}{|u(y)|} = \frac{|y(y^4 + 1)}{|2 - y|} \to \infty, \quad \text{då} \quad y \to \infty.$$

Detta ger att $\lim_{R\to\infty} \Delta_{I_R} \arg\left(f(z)\right) = \pi$. Således $\lim_{r\to\infty} \Delta_{C_R} \arg\left(f(z)\right) = 6\pi$.

Svar b: Funktionen $z^5+(1+i)z+2$ har 3 nollställen i den vänstra halvplanet.

Tal 6. Låt $t \geq 0$ först. Vi integrerar $f(z) = \frac{e^{itz}}{(1+z^2)^2}$ runt övre halvcirkeln $\Gamma_R = C_R + I_R$, där $C_R = \{z = x + iy : x^2 + y^2 = R, y > 0\}$, $I_R = \{z = x + iy : y = 0, -R \leq x \leq R\}$. Funktionen f har en pol av ordning 2 i punkten $z = i$ som ligger innanför Γ_R.
Residusatsen ger att

$$\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}\Big[f(z), i\Big] = 2\pi i \lim_{z \to i} \frac{d}{dz}\Big((z-i)^2 f(z)\Big) =$$

$$2\pi i \lim_{z \to i} \frac{d}{dz}\Big[\frac{(z-i)^2\, e^{itz}}{(z-i)^2(z+i)^2}\Big] = 2\pi i \lim_{z \to i}\Big[\frac{ite^{itz}}{(z+i)^2} - \frac{2e^{itz}}{(z+i)^3}\Big] = \frac{\pi}{2}(t+1)e^{-t}.$$

$$\lim_{R \to \infty} \int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = \lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \lim_{R \to \infty} \int_{C_R} f(z)\,dz = \frac{\pi}{2}(t+1)e^{-t}.$$

$$\Big|\int_{C_R} f(z)\,dz\Big| \leq \max_{z \in C_R} |f(z)|\,\pi\,R.$$

$$|f(z)| = \frac{|e^{itz}|}{|(z^2+1)^2|} = \frac{|e^{itx-ty}|}{|z^2+1|^2} \leq \frac{e^{-y}}{||z|^2-1|^2} \leq \frac{1}{||z|^2-1|^2}, \quad y \geq 0.$$

Vi har

$$\Big|\int_{C_R} f(z)\,dz\Big| \leq \frac{1}{(R^2-1)^2}\,\pi\,R \to 0, \quad \text{då} \quad r \to \infty.$$

P.g.a. $\sin(tx)$ är en udda funktion

$$\lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(tx)}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{\pi}{2}(t+1)e^{-t}.$$

Integralen har samma värdet om man byter t mot $-t$ för att $\cos(tx) = \cos(-tx)$.

Svar: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(tx)}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{\pi}{2}(|t|+1)e^{-|t|}$ för alla reella t.

Tal 7. Om $|\zeta| = R$ då $|f(\zeta)| \leq M$ och har vi också att $|\zeta - z| > |\zeta| - |z| = R - |z|$, då $|z| < R$. Vi användar generaliserade Couchys integralformeln

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta$$

som ger

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!}{2\pi} \int_{|\zeta|=R} \frac{M}{|(\zeta - z)|^{n+1}}\, d\zeta \leq \frac{n!\, M}{2\pi\, (R - |z|)^{n+1}}\ 2\pi.$$

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!\, M}{(R - |z|)^{n+1}}.$$