LÖSNINGAR TILL KS1 I KOMPLEX ANALYS
18 SEPTEMBER 2003

Uppgift 1.

$$V.S. = \sin^2 z = \Big(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\Big)^2 = -\frac{1}{4}\Big(e^{iz} - e^{-iz}\Big)^2$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\Big(e^{2iz} + e^{-2iz}\Big).$$

$$H.S. = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin(\pi/2 - 2z) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Big(\frac{e^{i(\pi/2-2z)} - e^{-i(\pi/2-2z)}}{2i}\Big)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Big(\frac{ie^{-i2z} - (-i)e^{i2z}}{2i}\Big) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\Big(e^{2iz} + e^{-2iz}\Big).$$

Uppgift 2. Funktionen $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy = z^2$. Därför

$$\int_C f(z)\,dz = \frac{1}{3}\Big[z^3\Big]_0^{1+i} = \frac{(1+i)^3}{3} = \frac{-2+2i}{3}.$$

Uppgift 3.

$$I := \int_{|z-i|=2} \frac{1}{z^2 - 2z + 2}\,dz = \int_{|z-i|=2} \frac{1}{(z-1-i)(z-1+i)}\,dz$$
$$= \frac{1}{2i}\int_{|z-i|=2}\Big(\frac{1}{z-1-i} - \frac{1}{z-1+i}\Big)\,dz.$$

Funktionen

$$\frac{1}{z-1+i}$$

är analytisk i $\{z :\ |z-i| \le 2\}$. Därför

$$\int_{|z-i|=2} \frac{1}{z-1+i}\,dz = 0.$$

Deformationsprincipen ger oss att

$$\int_{|z-i|=2} \frac{1}{z-1-i}\,dz = \int_{|w+1|=2} \frac{1}{w}\,dw = \int_{|w|=1} \frac{1}{w}\,dw = 2i\pi.$$

Svar: $I = \pi$.