LÖSNINGAR TILL KS2 I KOMPLEX ANALYS
9 OKTOBER 2003

Uppgift 1.

$$\frac{1}{z^2-4z+3} = \frac{1}{(z-3)(z-1)} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-1}\Big)$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{(z-4)+1} - \frac{1}{(z-4)+3}\Big) = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{(z-4)}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z-4}} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{(z-4)}{3}}\Big)$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{(z-4)}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-4)^{-n} - \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 3^{-n}(z-4)^n\Big)$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-4)^{-n-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}3^{-n-1}(z-4)^n\Big)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{-1}(-1)^{m+1}2^{-1}(z-4)^m + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}2^{-1}3^{-n-1}(z-4)^n.$$

Svar: $(z^2-4z+3)^{-1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-4)^n$ där $c_n = (-1)^{n+1}2^{-1}$, $n = -1, -2, \ldots$, och $c_n = (-1)^{n+1}2^{-1}3^{-n-1}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Uppgift 3A. Låt

$$f(z) = \frac{1}{z^4+5z^2+4} = \frac{1}{(z-i)(z+i)(z-2i)(z+2i)}.$$

Vi integrerar funktionen runt övre halvcirkeln $\Gamma_R = C_R + I_R$, där $C_R = \{z = x+iy \,:\, x^2+y^2 = R,\, y > 0\}$, $I_R = \{z = x+iy \,:\, y = 0,\, -R \leq x \leq R\}$, $R > 2$. Funktionen f har två poler av ordning 1 i punkten $z = i$ och i $z = 2i$ som ligger innanför Γ_R.
Residusatsen ger

$$\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i\Big(\mathrm{Res}\Big[f(z), i\Big] + \mathrm{Res}\Big[f(z), 2i\Big]\Big) = 2\pi i\Big(\frac{1}{6i} - \frac{1}{12i}\Big) = \frac{\pi}{6}.$$

Vi användar ML olikheten och får

$$\Big|\int_{C_R} f(z)\,dz\Big| \leq \max_{z\in C_R}|f(z)|\,\pi R \leq \frac{1}{(R-1)^2(R-2)^2}\,\pi R \to 0, \quad R\to\infty.$$

Därför

$$\frac{\pi}{6} = \int_{\Gamma_R} \frac{1}{z^4+5z^2+4}\,dz = \int_{C_R} \frac{1}{z^4+5z^2+4}\,dz + \int_{-R}^{R} \frac{1}{x^4+5x^2+4}\,dx$$

$$\to \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+5x^2+4}\,dx, \quad R\to\infty.$$

Svar: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+5x^2+4}\,dx = \pi/6$.

Uppgift 3.

Låt

$$F(z) = z^5 + e^z - 4 = f(z) + g(z),$$

där $f(z) = -4$ och $g(z) = z^5 + e^z$.

På cirkeln $|z| = 1$ har vi

$$|g(z)| = |z^5 + e^z| \leq 1 + e < 4 = |f(z)|.$$

Rouches sats ger då att $f(z)$ har lika många nollställen som $f(z) + g(z) = F(z)$ innanför cirkeln $|z| = 1$, dvs inga nollställe.