Institutionen för Matematik, KTH
Ari Laptev

Lösningsförslag till Tentamenskrivning på kursen 5B1201 och 5B1216 i Komplex Analys 04–10-23, klockan 09:00–12:00.

Tal 1.

C-R ekvationer ger oss att

$$u'_x = e^{x^2-y^2}\Big(2x\cos(2xy) - 2y\sin(2xy)\Big) = v'_y \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad v(x,y) = e^{x^2-y^2}\sin(2xy) + C(x).$$

$$v'_x = e^{x^2-y^2}\Big(2x\sin(2xy) + 2y\cos(2xy)\Big) + C'(x)$$

$$= -u'_y = -e^{x^2-y^2}\Big(-2y\cos(2xy) - 2x\sin(2xy)\Big)$$

$$\Longrightarrow \quad C'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad C(x) = k = konstant.$$

Därför

$$f(z) = u + iv = e^{x^2-y^2}\ \cos(2xy) + i\, e^{x^2-y^2}\sin(2xy) + ik$$

$$= e^{x^2-y^2+i2xy} + ik = e^{z^2} + ik.$$

Svar: $f(z) = e^{z^2} + ik, \quad k \in \mathbb{R}.$

Tal 2.

$$\frac{7z-3}{z(z-1)} = \frac{3}{z} + \frac{4}{z-1} = \frac{3}{1+(z-1)} + \frac{4}{z-1}$$

$$= 3\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n + \frac{4}{z-1}.$$

Svar:

$$\frac{7z-3}{z(z-1)} = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n(z-1)^n,$$

där $a_{-1} = 4$, $a_n = 3(-1)^n$, $n = 0, 1, \ldots.$.

Tal 3.
a. Låt först $|z| = 1$ och $f(z) = h(z)+g(z)$, $h(z) = 4z^4$ och $g(z) = 2(1-i)z+1$. Då

$$|h(z)| = 4 > 2\sqrt{2} + 1 = |2(1-i)z| + 1 \geq |g(z)|.$$

Rouches sats ger då att $f(z) = h(z) + g(z)$ har lika många nollställen som $h(z)$ innanför $\{z : |z| = 1\}$, dvs fyra nollställen.
b. Låt $|z| = 1/2$ och $f(z) = h(z) + g(z)$, $h(z) = 2(1-i)z$ och $g(z) = 4z^4 + 1$.

$$|h(z)| = 2\sqrt{2}/2 = \sqrt{2} > 4/16 + 1 = |4z^4| + 1 \geq |g(z)|.$$

Därför $f(z)$ har lika många nollställen som $h(z)$ i $\{z : |z| < 1/2\}$, dvs ett nollställe.
Svar: Funktionen $f(z) = 4z^4 + 2(1-i)z + 1$ har tre nollställen som ligger i $1/2 < |z| < 1$.

Tal 4. Låt

$$f(z) = \frac{ze^{iz}}{(z^2+1)(z^2+4)}.$$

Då

$$I := \int_0^\infty \frac{x \sin x}{(x^2+1)(x^2+4)}\, dx$$
$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{x \sin x}{(x^2+1)(x^2+4)}\, dx = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^\infty f(z)\, dz.$$

Vi integrerar funktionen f runt övre halvcirkeln: $\Gamma_R = C_R + I_R$, där
$C_R = \{z = x + iy : x^2 + y^2 = R, y > 0\}$,
$I_R = \{z = x + iy : y = 0, -R \leq x \leq R\}$, $R > 2$.
Funktionen f har två poler av ordning 1 i punkten $z = i$ och $z = 2i$ som ligger innanför Γ_R.
Residysatsen ger

$$\frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_{\Gamma_R} f(z)\, dz = \pi\Big(\operatorname{Res}\big[f(z), i\big] + \operatorname{Res}\big[f(z), 2i\big]\Big)$$

$$= \pi\Big(\frac{ie^{-1}}{2i(-1+4)} + \frac{2ie^{-2}}{(-4+1)4i}\Big) = \frac{\pi(e^{-1} - e^{-2})}{6}.$$

Vi användar ML olikheten och får

$$\Big|\int_{C_R} f(z)\,dz\Big| \le \max_{z\in C_R}|f(z)|\,\pi\,R \le \frac{R}{(R^2-1)(R^2-4)}\,\pi\,R \to 0, \quad R\to\infty.$$

Därför

$$\frac{\pi(e^{-1}-e^{-2})}{6} = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\int_{C_R} f(z)\,dz + \frac{1}{2}\operatorname{Im}\int_{I_R} f(z)\,dz$$

$$\to \frac{1}{2}\operatorname{Im}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{ix}}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx = I, \quad R\to\infty.$$

Svar:

$$\int_0^{\infty}\frac{x\sin x}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx = \frac{\pi(e^{-1}-e^{-2})}{6}.$$