Institutionen för Matematik, KTH
Ari Laptev

Lösningsförslag till Tentamenskrivning på kursen 5B1201 och 5B1216 i Komplex Analys 05-01-11, klockan 09:00–12:00.

Tal 1.

C-R ekvationer ger oss att

$$u'_x = -2x\sin(x^2-y^2)\cosh(2xy) + 2y\cos(x^2-y^2)\sinh(2xy) = v'_y \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad v(x,y) = -\sin(x^2-y^2)\sinh(2xy) + C(x).$$

$$v'_x = -2x\cos(x^2-y^2)\sinh(2xy) - 2y\sin(x^2-y^2)\cosh(2xy) + C'(x)$$

$$= -u'_y = -2y\sin(x^2-y^2)\cosh(2xy) - 2x\cos(x^2-y^2)\sinh(2xy) - 1$$

$$\Longrightarrow \quad C'(x) = -1 \quad \Longrightarrow \quad C(x) = -x + k = konstant.$$

Därför

$$f(z) = u + iv = \cos(x^2-y^2)\cosh(2xy) - \sin(x^2-y^2)\sinh(2xy) + y - ix + ik$$

$$= \cos z^2 - iz + ik.$$

Svar: $f(z) = \cos z^2 - iz + ik, \quad k \in \mathbb{R}.$

Tal 2.

$$\int_{|z-2|=2} \frac{\cos z}{(z^2-4)^2}\,dz = \int_{|z-2|=2} \frac{\cos z}{(z+2)^2} \cdot \frac{1}{(z-2)^2}\,dz$$

$$= \frac{2i\pi}{1!}\frac{d}{dz}\Big\{\frac{\cos z}{(z+2)^2}\Big\}_{z=2} = -2i\pi\Big(\frac{\sin 2}{16} + \frac{2\cos 2}{64}\Big) = -i\pi\Big(\frac{\sin 2}{8} + \frac{2\cos 2}{16}\Big).$$

Tal 3.

Funktionen $\cos 2z$ är analytisk. Därför uppnås $\max|\cos 2z|$ på randen till $\Omega = \{z = x + iy : \ 0 \le x \le \pi/2;\ 0 \le y \le 2\}$. Vi får

$$\cos 2z = \cos 2x\cosh 2y - i\sin 2x\sinh 2y.$$

a. Låt $y = 0$ och $0 \leq x \leq \pi/2$. Då

$$\max |\cos 2z| = \max |\cos 2x| = 1.$$

b. Om $x = \pi/2$, $0 \leq y \leq 2$, då

$$\max |\cos 2z| = \max \cosh(2y) = \cosh 4.$$

c. Om $y = 2$, $0 \leq x \leq \pi/2$, då

$$\max |\cos 2z|^2 = \max (\cos^2 2x \cosh^2 4 + \sin^2 2x \sinh^2 4).$$

Vi hittar kritiska punkter

$$\frac{d}{dx}(\cos^2 2x \cosh^2 4 + \sin^2 2x \sinh^2 4)$$

$$= -4 \cos 2x \sin 2x \cosh^2 4 + 4 \sin 2x \cos 2x \sinh^2 4 = 0,$$

som är $x = 0$, $x = \pi/2$, $x = \pm\pi/4$. Därför för $y = 2$ och $0 \leq x \leq \pi/2$ har vi

$$\max |\cos 2z|^2 = \cosh 4.$$

d. För $x = 0$, $0 \leq y \leq 2$

$$\max |\cos 2z|^2 = \max \cosh 2y = \cosh 4.$$

Svar: $\cosh 4$.

Tal 4. Låt $z_1 = 0$, $w_1 = 1$ och $z_2 = -1$, $w_2 = 0$. Vi vet att randen $\partial\mathbb{D} = \{z : |z| = 1\}$ skall avbildas till randen $\partial\mathbb{C}_+ = \{w : \operatorname{Re} w = 0\}$. Därför kan vi ta till ex. $z_3 = w_3 = i$. Satsen om bilinjer avbildning ger oss

$$\frac{w - w_1}{w - w_3} \cdot \frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}.$$

Då

$$\frac{w - 1}{w - i} \cdot \frac{0 - i}{0 - 1} = \frac{z - 0}{z - i} \cdot \frac{-1 - i}{-1 - 0}$$

$\Longrightarrow$

$$\frac{w - 1}{w - i} \cdot i = \frac{z}{z - i} \cdot (1 + i)$$

$\Longrightarrow$

$$w(z - i) - (z - i) = (1 - i)zw - z(1 + i)$$

$\Longrightarrow$

$$w = \frac{-i(z + 1)}{-i(1 - z)} = \frac{z + 1}{1 - z}.$$

Svar: $w = \frac{1+z}{1-z}$.