LÖSNINGAR TILL KS1 I KOMPLEX ANALYS
20 SEPTEMBER 2004

Uppgift 1.

a) Funktioner u och v är harmoniska. Därför

$$\Delta(uv) = \Delta(u)\, v + 2(u'_x v'_x + u'_y v'_y) + u\,\Delta(v) = 2u'_x v'_x + 2u'_y v'_y.$$

C-R ekvationer ger oss att $u'_x = v'_y$ och $u'_y = -v'_x$ och därför

$$\Delta(uv) = 2v'_y v'_x - 2v'_x v'_y = 0.$$

b) P.g.a. $f(x,y) = u(x,y)\cdot v(x,y)$ är harmonisk existerar en reell funktion $g(x,y)$ sådan att $w(z) = f(x,y) + ig(x,y)$ är analytisk. C-R ekvationer ger oss

$$g'_y = f'_x = u'_x v + u v'_x = v'_y v - u u'_y.$$

Efter integrering med avseende på y får vi

$$g = \frac{1}{2}\,(v^2 - u^2) + C(x)$$

Vi användar C-R ekvationer igen

$$g'_x = v'_x v - u'_x u + C'(x) = -u'_y v - v'_y u + C'(x) = -f'_y = -u'_y v - u v'_y.$$

Det betyder att $C(x) = k =$ konst och

$$g = \frac{1}{2}\,(v^2 - u^2) + k.$$

Svar:
$w(z) = f(x,y) + ig(x,y) = u(x,y)v(x,y) + \frac{i}{2}\,(v^2(x,y) - u^2(x,y)) + ik$.

Uppgift 2.

Lösning I.
Låt

$$C_1 = \{z = x + iy :\ 0 \le x \le 3,\ y = 0\},$$
$$C_2 = \{z = x + iy :\ x = 3,\ 0 \le y \le 4\},$$

och

$$C_3 = \{z = x + iy :\ y = 4x/3,\ 3 \ge x \ge 0\}.$$

$$I := \oint_C z \operatorname{Im} z\, dz = I_1 + I_2 + I_3 = \int_{C_1} z \operatorname{Im} z\, dz + \int_{C_2} z \operatorname{Im} z\, dz + \int_{C_3} z \operatorname{Im} z\, dz.$$

Om $z = x + iy$, då

$$z\,\text{Im}\,z\,dz = (x+iy)y\,(dx+idy) = (xy\,dx - y^2\,dy) + i(y^2\,dx + xy\,dy).$$

$$\int_{C_1} z\,\text{Im}\,z\,dz = \int_0^3 0\,dx + i\int_0^3 0\,dx = 0.$$

$$\int_{C_2} z\,\text{Im}\,z\,dz = \int_0^4 (-y^2)\,dy + i\int_0^4 3y\,dy = -\frac{4^3}{3} + i\,3\,\frac{4^2}{2}.$$

$$\int_{C_3} z\,\text{Im}\,z\,dz = \int_3^0 \Big(x\frac{4x}{3} - \frac{(4x)^2}{3^2}\frac{4}{3}\Big)\,dx + i\int_3^0 \Big(\frac{(4x)^2}{3^2} + x\frac{4x}{3}\frac{4}{3}\Big)\,dx$$
$$= -\frac{4}{3^2}\,3^3 + \frac{4^3}{3^4}\,3 - i2\,\frac{4^2}{3^3}\,3^3.$$

Därför

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = -12 - 8\,i.$$

Lösning II.
Låt $\Omega = \{z = x + iy :\ y \ge 0;\ 0 \le x \le 3,\ y \le \frac{4}{3}x\}$.

$$I := \oint_C z\,\text{Im}\,z\,dz = \oint_C (xy+iy^2)\,(dx+idy) = \oint_C xy\,dx - y^2\,dy + i\int_C y^2\,dx + xy\,dy.$$

Vi anvndar Greens sats $\oint_C (P\,dx + Q\,dy) = \int_\Omega (Q'_x - P'_y)\,dxdy$.

$$I := \iint_\Omega (-0 - x)\,dxdy + i\iint_\Omega (y - 2y)\,dxdy$$
$$= -\int_0^3 x\int_0^{4x/3} dydx - i\int_0^4 y\int_{3y/4}^3 dxdy$$
$$= -\frac{4}{3}\int_0^3 x^2\,dx - i\int_0^4 (3y - \frac{3}{4}\,y^2)\,dy$$
$$= -12 - i(24 - 16) = -12 - 8\,i.$$

Svar: $I = -12 - 8\,i$.

Uppgift 3.

Deformationsprincipen ger oss att

$$I := \oint_{|z|=3} \frac{3z-2}{z(z-1)}\,dz = \oint_{|z|=1/2} \Big(\frac{2}{z} + \frac{1}{z-1}\Big)\,dz + \oint_{|z-1|=1/2} \Big(\frac{2}{z} + \frac{1}{z-1}\Big)\,dz$$
$$= \oint_{|z|=1/2} \frac{2}{z}\,dz + \oint_{|z-1|=1/2} \frac{1}{z-1}\,dz$$
$$= 2\cdot 2\pi i + 2\pi i = 6\pi i.$$

Svar: $I = 6\pi i$.