LÖSNINGAR TILL KS2 I KOMPLEX ANALYS
5 OKTOBER 2004

Uppgift 1.

$$\begin{aligned}\frac{3z-3}{2z^2-5z+2} &= \frac{3(z-1)}{2}\,\frac{1}{(z-2)(z-1/2)}\\ &= \frac{3(z-1)}{2}\Big(\frac{2/3}{z-2}-\frac{2/3}{z-1/2}\Big)\\ &= \frac{3(z-1)}{2}\Big(-\frac{2/3}{1-(z-1)}-\frac{2}{3(z-1)}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{2(z-1)}}\Big)\\ &= -(z-1)\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n-\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^{-n}(z-1)^{-n}.\end{aligned}$$

Svar: Om $1/2<|z-1|<1$, då

$$\frac{3z-3}{2z^2-5z+2}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-1)^n,$$

där $a_n=-(-2)^n$, $n=0,-1,-2,\ldots$ och $a_n=-1$, $n=1,2,\ldots$.

Uppgift 2. Låt

$$f(z)=\frac{z}{z^3+1}.$$

Vi integrerar funktionen runt $C_R=\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\Gamma_3$, där:

$\Gamma_1=\{z=x+iy\;:\;y=0,\,0\le x\le R\}$, $R>2$,

$\Gamma_2=\{z=Re^{i\theta}\;:\;0\le\theta\le 2\pi/3\}$,

$\Gamma_3=\{z=re^{2i\pi/3}\;:\;R\ge r\ge 0\}$.

Funktionen f har en pol av ordning 1 i punkten $z=e^{i\pi/3}$ som ligger innanför C_R. Residysatsen ger

$$\begin{aligned}\oint_{C_R} f(z)\,dz &= 2\pi i\,\mathrm{Res}\Big[\frac{z}{z^3+1},e^{i\pi/3}\Big]\\ &= 2\pi i\lim_{z\to e^{i\pi/3}}\frac{(z-e^{i\pi/3})z}{z^3+1}\\ &= 2\pi i\lim_{z\to e^{i\pi/3}}\frac{z+(z-e^{i\pi/3})}{3z^2}=\frac{\pi}{3}\,(i+\sqrt{3}).\end{aligned}$$

1.
$$\int_0^R \frac{x}{x^3+1}\,dx \to I, \quad R \to \infty.$$
2. Vi använder ML olikheten och får
$$\Big|\int_{\Gamma_2} f(z)\,dz\Big| \le \max_{z\in\Gamma_2} |f(z)|\, 2\pi R/3 \le \frac{R}{(R^3-1)}\, 2\pi R/3 \to 0, \quad R \to \infty.$$
3.
$$\int_{\Gamma_3} f(z)\,dz = \int_R^0 \frac{re^{2i\pi/3}}{r^3+1}\, e^{2i\pi/3}\,dr$$
$$\to -e^{4i\pi/3}\cdot I = e^{i\pi/3}\cdot I = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot I, \qquad R \to \infty.$$
Därför
$$\frac{\pi}{3}\,(i+\sqrt{3}) = I\left(1 + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = I\left(\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Svar: $\int_0^\infty \frac{x}{x^3+1}\,dx = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

Uppgift 3.

1. Låt
$$F(z) = 6z^4 + z^3 + \text{Log}(z+2) = f(z) + g(z),$$
där $f(z) = 6z^4$ och $g(z) = z^3 + \text{Log}(z+2)$.

På cirkeln $|z| = 1$ har vi
$$|g(z)| = |z^3 + \text{Log}(z+2)| \le |z|^3 + |\text{Log}(z+2)|$$
$$\le 1 + \sqrt{(\ln 3)^2 + (\pi)^2} < 6 = |6z^4| = |f(z)|.$$
Rouches sats ger då att $f(z)$ har lika många nollställen som $f(z) + g(z) = F(z)$ innanför cirkeln $|z| = 1$, dvs fyra nollställen.