KTH
Inst för Matematik
Lars Filipsson
Andreas Nilsson

Modell-Tentamen i 5B1116 Matematik 2 vt 03

- För Bio 1, K 1, IT 1 -

Varje uppgift kan ge maximalt 3 poäng. Observera dock att man inte får poäng för de uppgifter på del A som man redan har klarat av i den kontinuerliga examinationen. B-delens uppgifter får alla räkna. För betyg 3 krävs minst 19 poäng, för betyg 4 minst 27 poäng och för betyg 5 minst 33 poäng.

DEL A

1. För vilka värden på konstanten a har nedanstående ekvationssystem unik lösning? Lös systemet för dessa värden på a.

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y + z = -1 \\ y + az = 3 \end{cases}$$

2. Bestäm om möjligt konstanten p så att matrisen M blir inverterbar, när

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ p & 1 & p & 1 \\ p & 0 & p & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Bestäm minsta avståndet mellan linjerna

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ och } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. Bestäm ekvationen för tangentplanet till ytan $z = xe^{x^2-y^2}$ i punkten $(-1, 1)$.

5. I vilken riktning från punkten $(1, -2)$ ökar funktionen $f(x, y) = xy^2 + \sin(4x - y^2)$ snabbast?

6. Maximera funktionen $f(x, y) = xy + y$ under bivillkoret $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

7. Skriv en liten uppsats om linjära avbildningar – vad är linjära avbildningar, vad har de för egenskaper, vad ska man ha dem till? Ge exempel!

DEL B

8. Bestäm matrisen i standardbasen för den linjära avbildning i rummet som består i spegling i planet $x + 2y + z = 0$

9. Hur transformeras uttrycket $\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}$ när man byter till polära koordinater?

10. Låt $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2x - 3y + 1$ och $g(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$. Sätt $h(t) = f \circ g(t)$ och $H(x, y) = g \circ f(x, y)$. Bestäm $h'(t)$ och $H'(x, y)$ (dvs bestäm J_h och J_H).

11. Definiera vad som menas med egenvärde och egenvektor till en matris. Bestäm om möjligt ett koordinatbyte som diagonaliserar matrisen $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

12. Definiera vad som menas med riktningsderivatan $D_v f(a, b)$ av en funktion f i riktningen $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ från en punkt (a, b). Bevisa sedan att $D_v f(a, b) = \text{grad} f(a, b) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$.

13. Transformera andragradsytan $x^2 + 4xz + z^2 + 2x = 1$ till huvudaxelform. Vilken typ av yta representerar ekvationen?

Lycka till!