# NORMALAPPROXIMATION FÖR SANNOLIKHETEN FÖR ATT FELAKTIGT HANTERADE RÖSTER PÅVERKAR MANDATFÖRDELNINGEN

SVANTE JANSON OCH SVANTE LINUSSON

## 1. Inledning

Antag att det är nästan jämnt mellan två partier A och B vid fördelningen av sista mandatet i en valkrets.[1] Antag också att några röster blivit felräknade, antingen så att de inte räknats fast de borde, eller så att de räknats fast de borde bedömts som ogiltiga. (Båda felen kan ha förekommit samtidigt.) Hur stor är sannolikheten att de felräknade rösterna har påverkat mandatfördelningen?

Vi utgår från att mandaten fördelas med jämkade uddatalsmetoden, vilken används för alla allmänna val i Sverige.[2] Vi betraktar här bara mandatfördelningen mellan partierna, och bortser från möjligheten att felräknade personröster kan ha påverkat vilka personer som valts på mandaten. Vi bortser också från fallet att de felräknade rösterna kan påverka vilka partier som kommer över spärren på 4% vid riksdagsval eller 3% vid landstingsval.

Vi antar att de felräknade rösterna inte skiljer sig från typiska röster i valkretsen. Vi antar också att de kan betraktas som oberoende av varandra. (Om dessa antaganden är rimliga måste bedömas från fall till fall.) Vi kan alltså beräkna sannolikheten genom att lägga till resp. dra ifrån motsvarande antal slumpvis valda röster, med samma fördelning som de räknade rösterna. Har båda typerna av fel förekommit drar vi först bort och lägger sedan till resp. antal; observera att vi inte kan kvitta felen mot varandra.

I [1] visar vi hur exakta beräkningar kan göras av sannolikheten för att felen skulle ändra mandatfördelningen. Här beskriver vi istället en enkel formel som bygger på approximation med normalfördelningen. Exempel visar att formeln långtifrån är exakt, men den är ofta användbar för att uppskatta storleksordningen på sannolikheten, vilket normalt är allt som behövs. Approximationen har också fördelen att ge en enkel formel, som på ett enkelt (om än approximativt) sätt visar hur sannolikheten beror på inblandade parametrar som antalet felräknade röster, partiernas storlek, m.m.

22 februari 2011.

[1] Eller vid fördelningen av sista utjämningsmandatet i ett riksdagsval eller landstingsval. I detta fall betraktas hela riket resp. länet som en valkrets.

[2] För en beskrivning av metoden, se t.ex. Valmyndighetens information på `http://www.val.se/det_svenska_valsystemet/valresultat/mandatfordelning/`

Formeln ges i avsnitt 2 med bevis i avsnitt 4, medan ett antal exempel ges och diskuteras i avsnitt 3.

Bakgrunden till denna rapport är delvis ett direkt önskemål från Valprövningsnämnden om en lathund som beskriver när man behöver göra exakta beräkningar som i [1] och när man med säkerhet kan säga att sannolikheten är så liten att det inte behövs. Vi vill understryka att detta arbete inte är en färdig sådan lathund. Ytterligare undersökningar skulle behövas om när man med stor säkerhet kan lita på den approximation som vi här beskriver. Se vidare bland kommentarerna efter satsen i avsnitt 2.

## 2. Beteckningar och resultat

Vi antar att A och B har $r_A$ resp. $r_B$ röster, av totalt $r$, och att de före sista mandatet har jämförelsetalen $j_A = r_A/d_A$ och $j_B = r_B/d_B$, där alltså enligt jämkade uddatalsmetodens regler $d_A = \max(2m'_A + 1,\ 1{,}4)$ och $d_B = \max(2m'_B + 1,\ 1{,}4)$ om $m'_A$ och $m'_B$ är antalet mandat för $A$ och $B$ *före* sista mandatet.

Antagandet att det är nästan jämnt mellan partierna för det sista mandatet betyder att $j_A \approx j_B$, dvs. att skillnaden mellan $j_A$ och $j_B$ är liten.

Vi översätter skillnaden $|j_A - j_B|$ i jämförelsetal till antal röster för parti $A$ med formeln

$$\delta_A = d_A\,|j_A - j_B|. \tag{1}$$

Detta är antalet extra röster som $A$ minst behöver få (om $B$ fick sista mandatet) eller förlora (om $A$ fick sista mandatet) för att mandatfördelningen skall ändras, förutsatt att $B$ inte får eller förlorar någon röst. Observera att $\delta_A$ i allmänhet inte är ett heltal, så antalet röster som krävs i praktiken är $\delta_A$ avrundat uppåt till närmast större (eller lika) heltal.

Beteckna antalet röster som felaktigt inte räknats med $n_+$, och antalet röster som felaktigt räknats med $n_-$. Vi skall alltså beräkna vad som händer om vi drar bort $n_-$ slumpvis valda röster och lägger till $n_+$ andra slumpvis valda röster (med samma fördelning som alla räknade röster). Låt $n = n_+ + n_-$ vara totala antalet felräknade röster, och låt $p_A = r_A/r$ och $p_B = r_B/r$ vara andelen röster på A resp. B; låt vidare $n_A = np_A$ och $n_B = np_B$ vara det förväntade antalet röster på A resp. B bland de $n$ felräknade rösterna.

Låt också

$$s = \frac{\delta_A^2}{np_A} \cdot \frac{d_B}{d_A + d_B} = \frac{\delta_A^2}{n_A} \cdot \frac{d_B}{d_A + d_B}. \tag{2}$$

Notera att eftersom vi har antagit att $j_A \approx j_B$, och alltså $p_A/d_A = j_A/r \approx j_B/r = p_B/d_B$, så spelar det mycket liten roll om vi byter plats på parti $A$ och parti $B$ i defintionen av $s$. Slutligen låter vi som vanligt $\Phi(x)$ beteckna fördelningsfunktionen för en standardiserad normalfördelning.

**Sats** (Normalapproximation)**.** *Med antaganden och beteckningar enligt ovan är sannolikheten att de $n$ felräknade rösterna påverkar mandatfördelningen approximativt*

$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z) \tag{3}$$

*där $z = \sqrt{s}$, med $s$ enligt ekvation* (2)*.*

**Kommentarer.**

(a) Högt värde på $s$ ger alltså låg sannolikhet för att mandatskifte skulle skett. Se tabell 1 för några relevanta värden på $1 - \Phi$.

| $s$ | $1-\Phi(\sqrt{s})$ |
|---|---|
| 2 | 0,16 |
| 4 | 0,023 |
| 6 | 0,0071 |
| 8 | 0,0023 |
| 10 | 0,00078 |
| 12 | 0,00027 |

Tabell 1. Sannolikheten $1 - \Phi(z)$ (avrundad) för några värden på $s$.

Approximationen ger alltså en uppskattning av sannolikheten till ca 2% om $s = 4$, 0,2% om $s = 8$, och 0,03% om $s = 12$; för större $z$ är sannolikheten ännu mindre och avtar snabbt. Hur små sannolikheter som man kan bortse från är en bedömnings- och smakfråga, men en tumregel kan vara att approximationen av sannolikheten är liten (under ca 2%) om $s \geq 4$ och mycket liten (under ca 0,1%) om $s \geq 10$.

(b) Exemplen i avsnitt 3 visar att normalapproximationen ovan långtifrån är exakt. Speciellt bör man vara försiktig om $\delta_A$ och $n_A$ är små. Om $s$ är tillräckligt stort så kan man dra slutsatsen att sannolikheten är mycket liten, men man kan knappast använda approximationen för att säga precis hur liten. För detta behövs exakta beräkningar som i [1]. Det vore intressant att utreda noggrannare vad man skall kräva av $s$, $\delta_A$ och $n_A$ för att säkert kunna lita på approximationen och när man skall göra exakta beräkningar. Om man gjorde en sådan undersökning skulle den kunna ligga till grund för den lathund som efterfrågades av Valprövningsnämnden.

(c) Formeln beror endast på det totala antalet felräknade röster $n = n_+ + n_-$, och inte på hur dessa fördelas på de två typerna av fel. (Speciellt ser vi att felen samverkar istället för att kompensera varandra.) Detta gäller, som andra slutsatser från satsen, bara approximativt. Exempel E1 och E2 från [1] visar att det ändå kan skilja en hel del mellan de exakta värdena, se tabell 2 nedan.

(d) Faktorn $d_B/(d_A + d_B)$ i (2) beror på hur många mandat de två partierna får i valkretsen. Faktorn är alltid mindre än 1, men ofta inte mycket mindre. Om partierna är jämnstora så är $d_A = d_B$ och faktorn är 1/2; om A är mindre än B gäller $d_A \le d_B$ och faktorn ligger mellan 1/2 och 1.

Detta visar att $s$ i (2), och därför sannolikheten för att mandatfördelningen ändras, i första hand beror av kvoten $\delta_A^2/n_A$, om A är det mindre av de två partierna.

(e) Beviset i avsnitt 4 av approximationen sker i två steg. Första steget är att fördelningen approximeras med en normalfördelning, och svaret ges då av en parameter $z^* = \sqrt{s^*}$. Det andra steget är att förenkla genom att approximera den rätta parametern $s^*$ med det vi definierat som $s$. Beviset visar att felet i det andra steget är litet, vilket också framgår av jämförelsen i tabell 2; huvudfelet ligger i själva normalapproximationen.

## 3. Exempel

Vi behandlar här dels två exempel från riksdagsvalet 2010, se [2, 3], dels de åtta konstruerade exemplen i [1] och fem hypotetiska exempel baserat på kommunalvalet 2010 i Halmstad [4]. Resultaten sammanfattas i tabell 2.

**Exempel V** (Riksdagsvalet 2010 i Värmland)**.** FP var 7 (eller mer precist 6,67, se nedan) röster från att ta det sista fasta mandatet i Värmlands län från S, se nedan. Av misstag hade 10 röster i Arvika och Sunne inte räknats.

Röstsiffrorna i Värmland var

$$r_{\mathrm{FP}} = 10652, \qquad r_{\mathrm{S}} = 68520, \qquad r = 179376.$$

FP fick inget fast mandat, och S fick 5, inklusive sista mandatet, så $m'_{\mathrm{FP}} = 0$ och $m'_{\mathrm{S}} = 4$ (antalet mandat förutom det sista), vilket ger divisorerna $d_{\mathrm{FP}} = 1{,}4$ och $d_{\mathrm{S}} = 9$. Jämförelsetalen före sista mandatet är alltså

$$j_{\mathrm{FP}} = \frac{10652}{1{,}4} = 7608{,}57,$$
$$j_{\mathrm{S}} = \frac{68520}{9} = 7613{,}33,$$

med skillnad $j_{\mathrm{S}} - j_{\mathrm{FP}} = 4{,}76$. Antalet extra röster FP behöver är alltså

$$\delta_{\mathrm{FP}} = 1{,}4(j_{\mathrm{S}} - j_{\mathrm{FP}}) = 6{,}67.$$

Vi har $n = 10$ ($n_+ = 10$, $n_- = 0$), och $p_{\mathrm{FP}} = 10652/179376 = 0{,}059$, vilket ger $n_{\mathrm{FP}} = np_{\mathrm{FP}} = 0{,}59$. Alltså är

$$\frac{\delta_{\mathrm{FP}}^2}{n_{\mathrm{FP}}} = 74{,}84.$$

Vidare är faktorn $d_{\mathrm{S}}/(d_{\mathrm{FP}} + d_{\mathrm{S}}) = 0{,}865$, vilket ger $s = 64{,}8$. Ett så stort $s$ ger $1 - \Phi(\sqrt{s}) < 10^{-15}$, ett extremt litet värde som är en dålig approximation av det korrekta $2 \cdot 10^{-7} = 0{,}0000002$.[3] Men det stora värdet på $s$ leder till den korrekta slutsatsen att sannolikheten är mycket liten.

**Exempel G** (Riksdagsvalet 2010 i Göteborgs kommun)**.** Vi har $r_{\mathrm{S}} = 80544$,[4] $r_{\mathrm{FP}} = 26829$, $r = 322458$, $m'_{\mathrm{S}} = 4$, $m'_{\mathrm{FP}} = 1$, vilket ger $j_{\mathrm{S}} = \frac{80544}{9} = 8949{,}33$, $j_{\mathrm{FP}} = \frac{26829}{3} = 8943$ och $\delta_{\mathrm{FP}} = 3 \cdot (j_{\mathrm{S}} - j_{\mathrm{FP}}) = 19$. Valprövningsnämnden fann att i detta fall var antalet felaktigt hanterade röster $n_+ = 34$ och $n_- = 111$, så $n = 145$. Vi får då

$$\frac{\delta_{\mathrm{FP}}^2}{n_{\mathrm{FP}}} = 29{,}9 \quad \text{och} \quad s = \frac{\delta_{\mathrm{FP}}^2}{n_{\mathrm{FP}}} \cdot \frac{d_{\mathrm{S}}}{d_{\mathrm{S}} + d_{\mathrm{FP}}} = 22{,}4.$$

Det ger en sannolikhet enligt approximationen i (3) på $1 - \Phi(\sqrt{22{,}4}) = 0{,}0000011$. Detta är större än värdet från de exakta beräkningarna $0{,}0000003$,[5] men av samma storleksordning.

Exempel E1–E8 är de åtta konstruerade exemplen från [1] (i samma ordning som där); vi hänvisar dit för detaljer i exemplen.

**Exempel E1–E4.** I dessa exempel från [1] har vi $r_A = 5000$, $r_B = 45041$, $r = 100041$, $m'_A = 1$ och $m'_B = 13$. Följdaktligen blir $\delta_A = 3(\frac{45041}{27} - \frac{5000}{3}) = 4{,}56$. I E1 är $n_+ = 100$, $n_- = 0$, i E2 är $n_+ = 0$, $n_- = 100$, i E3 är $n_+ = 100$, $n_- = 100$ och i E4 är $n_+ = 20$, $n_- = 0$. Detta ger de värden som syns i tabellen. Notera att approximationen är symmetrisk i E1 och E2, men verkligheten är det inte.

I exempel E4 ger det höga värdet $s = 18{,}7$ den riktiga uppfattningen att sannolikheten är liten. Approximationen är dock en faktor 60 från det exakta värdet, och alltså en dålig uppskattning. Detta exempel understryker vikten av försiktighet med att använda approximationen som uppskattning av det exakta värdet för höga värden på $s$.

I exemplen E5–E8 nedan ger approximationen en uppskattning som väl visar storleksordningen på sannolikheten att felen påverkat mandatfördelningen.

**Exempel E5.** Vi har $r_A = 5000$, $r_B = 45003$, $r = 100041$, $m'_A = 1$ och $m'_B = 13$. Vidare är $n = n_+ = 4$ och $n_- = 0$.

**Exempel E6.** Vi har $r_A = 45004$, $r_B = 5001$, $r = 100005$, $m'_A = 13$, $m'_B = 1$, $n = n_+ = 100$ och $n_- = 0$.

[3] I den exakta beräkning som gjordes åt Valprövningsnämnden [3] blev svaret något annorlunda, eftersom hänsyn togs till 8 av de oräknade rösterna kom från Arvika och 2 från Sunne, med något annorlunda fördelningar.

[4] En väldigt noggrann läsare kanske invänder att S fick 80543 röster enligt Valmyndighetens protokoll. Valprövningsnämnden fann dock ytterligare en röst som skulle tillgodoräknas S, se [2].

[5] I den exakta beräkning som gjordes åt Valprövningsnämnden [2] blev svaret något annorlunda, bl.a. eftersom hänsyn togs till att 31 av de 34 oräknade rösterna var "onsdagsröster", med en något annorlunda fördelning.

| Ex. | $p_A$ | $p_B$ | $\delta_A$ | $n$ | $s$ | $s^*$ | $1-\Phi(\sqrt{s})$ | Exakta beräkningar |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V | 0,06 | 0,38 | 6,67 | 10 | 64,768 | 64,770 | $4 \cdot 10^{-16}$ | $2 \cdot 10^{-7}$ |
| G | 0,08 | 0,25 | 19 | 145 | 22,442 | 22,433 | $1{,}1 \cdot 10^{-6}$ | $0{,}3 \cdot 10^{-6}$ |
| E1 | 0,05 | 0,45 | 4,56 | 100 | 3,737 | 3,744 | 0,027 | 0,036 |
| E2 | 0,05 | 0,45 | 4,56 | 100 | 3,737 | 3,733 | 0,027 | 0,014 |
| E3 | 0,05 | 0,45 | 4,56 | 200 | 1,869 | 1,869 | 0,086 | 0,085 |
| E4 | 0,05 | 0,45 | 4,56 | 20 | 18,691 | 18,691 | $7{,}7 \cdot 10^{-6}$ | 0,00046 |
| E5 | 0,05 | 0,45 | 0,33 | 4 | 0,500 | 0,500 | 0,24 | 0,19 |
| E6 | 0,45 | 0,05 | 5 | 100 | 0,056 | 0,056 | 0,41 | 0,43 |
| E7 | 0,20 | 0,20 | 5 | 100 | 0,625 | 0,626 | 0,21 | 0,21 |
| E8 | 0,05 | 0,45 | 4,89 | 100 | 4,304 | 4,312 | 0,019 | 0,028 |
| H2 | 0,04 | 0,28 | 1,57 | 2 | 27,117 | 27,116 | $9{,}6 \cdot 10^{-8}$ | 0,0016 |
| H5 | 0,04 | 0,28 | 1,57 | 5 | 10,847 | 10,849 | 0,00049 | 0,014 |
| H10 | 0,04 | 0,28 | 1,57 | 10 | 5,423 | 5,426 | 0,0099 | 0,042 |
| H15 | 0,04 | 0,28 | 1,57 | 15 | 3,616 | 3,619 | 0,029 | 0,053 |
| H30 | 0,04 | 0,28 | 1,57 | 30 | 1,808 | 1,811 | 0,089 | 0,103 |

Tabell 2. Några exempel. Parti A och B är de partier som precis inte fick resp. fick sista mandatet. (För exempel V och G är A = FP och B = S; för H2–H30 är A = SD och B = S.) Variabeln $s^*$ definieras i avsnitt 4.

**Exempel E7.** Vi har $r_A = 20000$, $r_B = 20005$, $r = 100005$, $m'_A = 5$, $m'_B = 5$, $n = n_+ = 100$ och $n_- = 0$.

**Exempel E8.** Vi har $r_A = 5000$, $r_B = 45044$, $r = 100044$, $m'_A = 1$ och $m'_B = 13$. Även här är $n = n_+ = 100$ och $n_- = 0$.

**Exempel H2–H30** (Kommunalvalet i Halmstad 2010, västra valkretsen)**.** Vi har $r_{\mathrm{SD}} = 1257$, $r_{\mathrm{S}} = 8810$, $r = 31551$, $m'_{\mathrm{SD}} = 1$ och $m'_{\mathrm{S}} = 10$. Här är $\delta_{\mathrm{SD}} = 1{,}57$ och i [4] gjordes exakta beräkningar för sannolikheten för mandatskifte för olika hypotetiska värden på $n_+$ mellan 2 och 30, i alla fall med $n_- = 0$. (I verkligheten var $n_+ = 1$ och sannolikheten därför 0, se [4].) Vi jämför dessa med vad normalapproximationen ger i tabell 2.

Vi ser i tabellen, särskilt fall H2–H10, att approximationen riskerar att ge en felaktig uppfattning av sannolikheten. Detta illusterar att man inte bör använda normalapproximationen för små värden på $\delta_A$ och $n_A$. Då bör istället exakta beräkningar utföras.

## 4. Bevis

Låt slumpvariabeln $X = X_{n_+,n_-}$ vara ändringen i skillnaden $j_A - j_B$ om vi lägger till $n_+$ nya och drar bort $n_-$ gamla röster, valda slumpvis. Det blir alltså mandatskifte om antingen $j_A - j_B \leq 0$ och $X + j_A - j_B \geq 0$ eller $j_A - j_B \geq 0$ och $X + j_A - j_B \leq 0$. (Vid likhet sker lottning.) I första fallet krävs alltså $X \geq j_B - j_A = |j_A - j_B|$ och i andra fallet krävs $X \leq -(j_A - j_B) = -|j_A - j_B|$.

Vi approximerar $X$ med en normalfördelad variabel $X^* \sim N(\mu, \sigma^2)$ med rätt väntevärde $\mu$ och varians $\sigma^2$, dvs.

$$\mu = \mathbb{E}\, X, \qquad \sigma^2 = \operatorname{Var} X. \tag{4}$$

Vi återkommer till beräkningen av dessa.

Sannolikheten för mandatskifte approximeras alltså i första fallet med

$$\mathbb{P}(X^* \geq |j_A - j_B|) = \mathbb{P}\Big(\frac{X^* - \mu}{\sigma} \geq \frac{|j_A - j_B| - \mu}{\sigma}\Big) = 1 - \Phi(z^*),$$

där

$$z^* = \frac{|j_A - j_B| - \mu}{\sigma},$$

och i andra fallet med

$$\mathbb{P}(X^* \leq -|j_A - j_B|) = \mathbb{P}\Big(\frac{X^* - \mu}{\sigma} \leq \frac{-|j_A - j_B| - \mu}{\sigma}\Big) = \Phi(-z^*),$$

där

$$z^* = \frac{|j_A - j_B| + \mu}{\sigma}.$$

I båda fallen får vi alltså approximationen $\Phi(-z^*) = 1 - \Phi(z^*)$, med

$$z^* = \begin{cases} \frac{|j_A - j_B| - \mu}{\sigma} = \frac{j_B - j_A - \mu}{\sigma}, & j_A \leq j_B, \\ \frac{|j_A - j_B| + \mu}{\sigma} = -\frac{j_B - j_A - \mu}{\sigma}, & j_A > j_B, \end{cases} \tag{5}$$

Vi skall visa att $z = \sqrt{s}$ är en god approximation av $z^*$, vilket ger approximationen $1 - \Phi(z)$ i (3). Vi definierar också $s^* = (z^*)^2$ för jämförelserna i tabell 2.

Vi börjar med att beräkna $\mu$ och $\sigma^2$ exakt.

Med bara en extra röst gäller att $X_1 = X_{1,0}$ är $1/d_A$ med sannolikhet $p_A$ och $-1/d_B$ med sannolikhet $p_B$, och annars 0. Väntevärdet är därför

$$\mathbb{E}\, X_1 = \frac{r_A}{r} \cdot \frac{1}{d_A} - \frac{r_B}{r} \cdot \frac{1}{d_B} = \frac{1}{r}(j_A - j_B), \tag{6}$$

och variansen är

$$\operatorname{Var} X_1 = \mathbb{E}(X_1^2) - (\mathbb{E}\, X_1)^2 = \frac{r_A}{r} \cdot \frac{1}{d_A^2} + \frac{r_B}{r} \cdot \frac{1}{d_B^2} - (\mathbb{E}\, X_1)^2. \tag{7}$$

För en röst som tas bort får vi $X_{0,1} = -X_{1,0}$, och alltså $\mathbb{E}\, X_{0,1} = -\mathbb{E}\, X_1$ och $\operatorname{Var} X_{0,1} = \operatorname{Var} X_1$.

Sammanlagt blir därför

$$\mu = \mathbb{E}\, X_{n_+,n_-} = n_+ \,\mathbb{E}\, X_{1,0} + n_- \,\mathbb{E}\, X_{0,1} = (n_+ - n_-)\,\mathbb{E}\, X_1 = \frac{n_+ - n_-}{r}(j_A - j_B). \tag{8}$$

Om vi approximerar och betraktar de borttagna rösterna som oberoende får vi

$$\sigma^2 \approx \operatorname{Var} X_{n_+,n_-} = (n_+ + n_-)\operatorname{Var} X_1 = n \operatorname{Var} X_1. \tag{9}$$

En exakt beräkning (med den hypergeometriska fördelningen som tar hänsyn till beroendet vid dragning utan återläggning; vi utelämnar detaljerna) ger istället den exakta

$$\sigma^2 = \Bigl(n_+ + n_-\frac{r-n_-}{r-1}\Bigr)\operatorname{Var} X_1. \tag{10}$$

Vi förutsätter att andelen felräknade röster är liten så $n_- \le n \ll r$ och alltså $(r-n_-)/(r-1) = 1-(n_- -1)/(r-1) \approx 1$. Vi kan därför försumma korrektionsfaktorn i (10) och använda (9) som en utmärkt approximation.

Vi har antagit att $j_A \approx j_B$, och (6) visar därför att $\mathbb{E}\, X_1 \approx 0$; vi skall visa att $\mathbb{E}\, X_1$ kan ignoreras. Först ser vi att täljaren i (5) är

$$|j_A-j_B|\pm\mu = |j_A-j_B|\pm\frac{n_+-n_-}{r}(j_A-j_B) = |j_A-j_B|\Bigl(1\pm\frac{n_+-n_-}{r}\Bigr). \tag{11}$$

Vi förutsätter som sagt att andelen felräknade röster är liten, så $n = n_+ + n_- \ll r$. Då är $|n_+ - n_-|/r \le n/r \ll 1$, så (11) ger

$$|j_A - j_B| \pm \mu \approx |j_A - j_B|.$$

Med andra ord kan vi ignorera $\mu$ i täljaren i (5).

Vi kan också ignorera $\mathbb{E}\, X_1$ i (7). Vi har nämligen antagit $j_A \approx j_B$ och alltså $|j_A - j_B| \ll j_A$, vilket ger, med hjälp av (6),

$$(\mathbb{E}\, X_1)^2 = \frac{|j_A-j_B|^2}{r^2} \ll \frac{j_A^2}{r^2} = \frac{r_A^2}{r^2 d_A^2} = \frac{r_A}{r}\cdot\frac{r_A}{r}\cdot\frac{1}{d_A^2} < \frac{r_A}{r}\cdot\frac{1}{d_A^2}.$$

Alltså ger (7) approximationen

$$\operatorname{Var} X_1 \approx \frac{r_A}{r}\cdot\frac{1}{d_A^2} + \frac{r_B}{r}\cdot\frac{1}{d_B^2} = \frac{j_A}{rd_A} + \frac{j_B}{rd_B} \approx \frac{j_A}{rd_A} + \frac{j_A}{rd_B} = \frac{r_A}{rd_A^2}\Bigl(1+\frac{d_A}{d_B}\Bigr),$$

och (9) ger, eftersom $r_A/r = p_A$,

$$\sigma^2 \approx n\frac{p_A}{d_A^2}\Bigl(1+\frac{d_A}{d_B}\Bigr) = n\frac{p_A}{d_A^2}\cdot\frac{d_A+d_B}{d_B}.$$

Vi kan nu approximera $z^*$ i (5) med

$$z^* \approx \frac{|j_A-j_B|}{\sqrt{n\frac{p_A}{d_A^2}\cdot\frac{d_A+d_B}{d_B}}} = \frac{d_A|j_A-j_B|}{\sqrt{np_A}}\sqrt{\frac{d_B}{d_A+d_B}} = z$$

definierad i (2), eftersom $\delta_A = d_A|j_A - j_B|$ enligt (1).

## Referenser

[1] Svante Janson & Svante Linusson, Exempel på sannolikhetsberäkningar för att felaktigt hanterade röster påverkar valutgången. Rapport till Valprövningsnämnden 9 december 2010. Dnr 22-2010.

[2] Svante Linusson, *Sannolikheten för ändrad mandatfördelning i riksdagsvalet i Göteborgs kommuns valkrets*. Yttrande till Valprövningsnämnden 7 december 2010, Dnr 92-2010.

[3] Svante Linusson, *Sannolikheten för ändrad mandatfördelning i riksdagsvalet i Värmlands läns valkrets*. Yttrande till Valprövningsnämnden 7 december 2010, Dnr 26-2010.

[4] Svante Linusson, *Sannolikheten för ändrad mandatfördelning i kommunalvalet i Halmstad*. Yttrande till Valprövningsnämnden, 13 december 2010, Dnr 76-2010.

Matematiska Institutionen, Uppsala Universitet, Uppsala, Sweden
E-post: svante.janson@math.uu.se

Matematiska Institutionen, KTH, SE-100 44 Stockholm, Sweden
E-post: linusson@math.kth.se