it.&Int del2
för F2
2001

Lösningar till Inlämningsuppgift 2

(1)

1. a) Observera att då m och n är heltal gäller

$$f(x+2\pi m, y+2\pi n) = f(x,y) \qquad (*)$$

Låt K vara kvadraten $K = \{(x,y);\ 0 \le x \le 2\pi,\ 0 \le y \le 2\pi\}$

Eftersom K är kompakt inser vi att f antar max och min på K. Vidare ger (*) att max och min för f i $\mathbb{R}^2$ uppfyller

$$\max_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = \max_{(x,y)\in K} f(x,y)$$

$$\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = \min_{(x,y)\in K} f(x,y)$$

så max och min för f antas.
En max och min punkt måste vara en kritisk punkt. Vi får $\nabla f = 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \cos x + \cos(x+y) = 0 & (1) \\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y} = \cos y + \cos(x+y) = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow \begin{cases} x+y = \pm(\pi + x) + 2\pi m \\ x+y = \pm(\pi + y) + 2\pi n \end{cases}$$

(a) $\begin{cases} x+y = \pi + x + 2\pi m \\ x+y = \pi + y + 2\pi n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} x = \pi + 2\pi n \\ y = \pi + 2\pi m \end{matrix}$

(b) $\begin{cases} x+y = -(\pi + x) + 2\pi m \\ x+y = \pi + y + 2\pi n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + 2\pi n \\ y = \pi + 2\pi n_1 \end{cases}$

(2)

(c) $\begin{cases} x+y = \pi + x + 2\pi m \\ x+y = -(\pi + y) + 2\pi n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + 2\pi m_1 \\ y = \pi + 2\pi m \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x+y = -(\pi + x) + 2\pi m \\ x+y = -(\pi + y) + 2\pi n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y = -\pi + 2\pi m \\ x+2y = -\pi + 2\pi n \end{cases}$

Man ser att lösningarna till (a), (b), (c) och (d) kan sammanfattas

$$\begin{cases} x_0 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi m \\ y_0 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \pi + 2\pi m \\ y = \pi + 2\pi n \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2\pi m \\ y = \frac{\pi}{3} + 2\pi n \end{cases}$$

och $f(x_0, y_0) = -\sin\frac{\pi}{3} - \sin\frac{2}{3} - \sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$f(x_1, y_1) = 0$

$f(x_2, y_2) = \sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

Svar: $f_{min} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$ för $\begin{cases} x_0 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi m \\ y_0 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n \end{cases}$

$f_{max} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ för $\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi m \\ y_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi n \end{cases}$

b) Låt $g(x,y) = \ln f(x,y) = p(\ln|x| + \ln|y|) - x^2 - y^2$

Vi ser att $g(-x,-y) = g(-x,y) = g(x,-y)$ så det räcker att betrakta $x > 0,\ y > 0$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x} = p\,\dfrac{1}{x} - 2x \\[2mm] \dfrac{\partial g}{\partial y} = p\,\dfrac{1}{y} = -2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{\frac{p}{2}} \\ y = \sqrt{\frac{p}{2}} \end{cases}$$

I denna punkt är $g\left(\sqrt{\frac{p}{2}}, \sqrt{\frac{p}{2}}\right) = p \ln\frac{p}{2} - p^2$

och $f\left(\sqrt{\frac{p}{2}}, \sqrt{\frac{p}{2}}\right) = \left(\frac{p}{2}\right)^p e^{-p}$

Vidare är $g(x,y) = h(x) + h(y)$
där h är växande för $0 < x < \sqrt{\frac{p}{2}}$ och
h är avtagande för $x > \sqrt{\frac{p}{2}}$

Detta ger att $f_{max} = \left(\frac{p}{2}\right)^p e^{-p}$ och $f_{min} = 0$
som antas på x-axeln och y-axeln.

Svar: $f_{max} = \left(\frac{p}{2}\right) e^{p}$ och $f_{min} = 0$

2. Till att börja med noterar vi att
bivillkoret $g(x,y) = x^4 + y^4 - 1 = 0$
definierar en kompakt mängd så
största och minsta värde antas.

① Singulära punkter för bivillkoret.

$\nabla g = 0 \iff (4x^3, 4y^3) = (0,0) \iff (x,y) = (0,0)$

som ej uppfyller bivillkoret.

Lagrangefunktionen är

$L(x,\lambda) = xy^3 + \lambda(1 - x^4 - y^4)$

② Kritiska punkter för Lagrangefunktionen

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = y^3 - \lambda 4x^3 = 0 & (1) \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 3xy^2 - \lambda 4y^3 = 0 & (2) \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 1 - x^4 - y^4 = 0 & (3) \end{cases}$$

$(1) \Rightarrow 4\lambda = \frac{y^3}{x^3}$, $(2) \Rightarrow 4\lambda = \frac{3x}{y} \Rightarrow y^4 = 3x^4$

$x^4 + y^4 = 1 \Rightarrow x^4 + 3x^4 = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt[4]{\frac{1}{4}}$, $y = \pm\sqrt[4]{\frac{3}{4}}$

$\begin{cases} x = \sqrt{\frac{1}{2}} \\ y = \sqrt[4]{\frac{3}{4}} \end{cases}$ $\begin{cases} x = -\sqrt{\frac{1}{2}} \\ y = -\sqrt[4]{\frac{3}{4}} \end{cases}$ $\begin{cases} x = \sqrt{\frac{1}{2}} \\ y = -\sqrt[4]{\frac{3}{4}} \end{cases}$ $\begin{cases} x = -\sqrt{\frac{1}{2}} \\ y = \sqrt[4]{\frac{3}{4}} \end{cases}$

$u_{min} = -\frac{3^{3/4}}{4}$ $u_{max} = \frac{3^{3/4}}{4}$. Eftersom
$\{(x,y) : x^4 + y^4 = 1\}$ är sammanhängande antas mellanliggande värden.

Svar: Värdena i intervallet $-\frac{3^{3/4}}{4} \le u \le \frac{3^{3/4}}{4}$ an

3 a) $\iint_\Omega \frac{dx\,dy}{1+x+y} = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{dy}{1+x+y}$

$= \int_0^1 \left[\ln(2) - \ln(1+x)\right] dx$

$= \ln 2 - \left[(1+x)\ln(1+x)\right]_0^1 + \int_0^1 dx$

$= \ln 2 - 2\ln 2 + 1 = 1 - \ln 2$

Svar. Integralen är $1 - \ln 2$

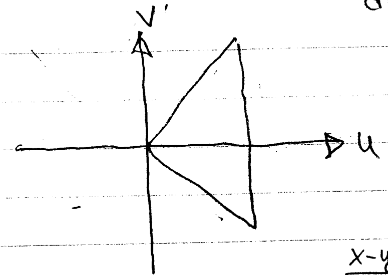
b) $\iint_\Omega e^{\frac{x-y}{x+y}} dx\,dy$

Under variabelbytet $\begin{cases} u = x - y \\ v = x + y \end{cases}$

avbildas triangeln på triangeln med hörn i $(0,0)$, $(-1,1)$ och $(1,1)$.

Vi får $\frac{d(u,v)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$

och således är $\frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \frac{1}{2}$



Vi får $\iint_\Omega e^{\frac{x-y}{x+y}}\,dx\,dy = \iint_T e^{\frac{u}{v}} \left|\frac{d(x,y)}{d(u,v)}\right| du\,dv$

$$= \int_0^1 dv \int_{-v}^{v} e^{\frac{u}{v}}\,du$$

$$= \int_0^1 dv \left[\frac{e^{\frac{u}{v}}}{\frac{1}{v}}\right]_{u=-v}^{u=v}$$

$$= \int_0^1 v\,(e-e^{-1})\,dv = \frac{1}{2}(e-e^{-1})$$

Svar: Integralen är $\frac{1}{2}(e-e^{-1})$

4. I sfäriska koordinater får vi

$$\iiint_{R_1^2 \le x^2+y^2+z^2 \le R_2^2} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\, e^{-x^2-y^2-z^2}\,dx\,dy\,dz$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r} e^{-r^2} \cdot r^2 \sin\varphi\, dr$$

$$= 2\pi \left[-\cos\varphi\right]_0^{\pi} \cdot \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2}\right]_{R_1}^{R_2}$$

$$= 2\pi \left(e^{-R_1^2} - e^{-R_2^2}\right)$$

Svar: Integralen är $2\pi\left(e^{-R_1^2} - e^{-R_2^2}\right)$

5. Vi observerar att då $a>0$ gäller

$$f(a) = \int_0^\infty \frac{dx}{a+x^2} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^\infty \frac{\frac{1}{\sqrt{a}}\,dx}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)^2}$$

$$= \left[t = \frac{1}{\sqrt{a}}x;\ dt = \frac{1}{\sqrt{a}}dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{a}}$$

Derivation under integraltecknet ger

$$f'(a) = -\int_0^\infty \frac{dx}{(a+x^2)^2}$$

$$f''(a) = 2\int_0^\infty \frac{dx}{(a+x^2)^3}$$

$$\vdots$$

$$f^{(k)}(a) = (-1)^k k! \int_0^\infty \frac{dx}{(a+x^2)^k}$$

(7)

6. Vi delar upp integralen i två delar dels över $\Omega_1 = \{(x,y): x^2+y^2 \le 1\}$ och över $\Omega_2 = \{(x,y): x^2+y^2 \ge 1\}$

För båda integralerna använder vi polära koordinater.

$$\iint_{\Omega_1} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{1}{r^{2\alpha}} \frac{1}{(1+r^2)^\beta} r\,dr =$$

Eftersom

$$\frac{1}{2^\beta} \le \frac{1}{(1+r^2)^\beta} \le 1$$

konvergerar denna integral om och endast om

$$\int_0^1 \frac{1}{r^{2\alpha-1}} dr \quad \text{är konvergent}$$

Men $\int_0^1 \frac{dt}{t^\gamma} < \infty \iff \gamma < 1$ så

vi får villkoret $2\alpha - 1 < 1$

$$\iint_{\Omega_2} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^\infty \frac{1}{r^{2\alpha}} \cdot \frac{1}{(1+r^2)^\beta} r\,dr$$

Denna integral konvergerar om och endast om

$$\int_1^\infty \frac{1}{r^{2\alpha+2\beta-1}} dr < \infty$$

dvs. om $2\alpha + 2\beta - 1 > 1 \iff \alpha + \beta > 1$

Svar: Villkoret på α och β för konvergens är $\alpha < 1$ och $\alpha + \beta > 1$

(8)

7. Ytan är en spiral som sträcker sig från linjen $\{(x,y,z): 0 \le x \le a,\ y=0,\ z=0\}$ till $\{(x,y,z): 0 \le x \le a,\ y=0,\ z = 2\pi b\}$

Låt $\bar{r}(u,v) = (au\cos v, au\sin v, bv)$

Vi får

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} = (a\cos v, a\sin v, 0)$$

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial v} = (-au\sin v, au\cos v, b)$$

Vi får

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ a\cos v & a\sin v & 0 \\ -au\sin v & au\cos v & b \end{vmatrix} = (ab\sin v, -ab\cos v, a^2 u)$$

Arean blir

$$S = \iint_{\substack{0\le u\le 1 \\ 0 \le v \le 2\pi}} \left| \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \right| du\,dv =$$

$$= \int_0^{2\pi} dv \int_0^1 \sqrt{a^2b^2 + a^4u^2}\, du$$

$$= 2\pi a^2 \int_0^1 \sqrt{u^2 + \frac{b^2}{a^2}}\, du =$$

$$= 2\pi a^2 \left[\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}} + \frac{1}{2}\frac{b^2}{a^2} \ln\left|1+\sqrt{1+\left(\tfrac{b}{a}\right)^2}\right| - \frac{1}{2}\frac{b}{a} - \frac{1}{2}\frac{b}{a} \ln\left(\frac{b}{a}\right)^2 \right]$$

$$= \pi a \sqrt{a^2+b^2} + \pi b^2 \ln\left|1+\sqrt{1+\left(\tfrac{b}{a}\right)^2}\right| - \pi ab - 2\pi ab \ln\frac{b}{a}$$

vilket är svaret.