# FÖRSTA ORDNINGENS SYSTEM MED VARIABEL SYSTEMMATRIS

GUNNAR PETERS HT 1995, HT 1999

## 1. Introduktion

I denna text kommer vi att studera ett allmänt första ordningens system av ordinära differentialekvationer,

$$\frac{d}{dt}\bar{y}(t) = A(t)\bar{y}(t), \qquad a < t < b\,. \tag{1.1}$$

Vi låter $n$ vara dimensionen för systemet, d v s $\bar{y}(t) \in \mathbb{R}^n$. Systemmatrisen $A$ blir då en $n \times n$ matris. Vi introducerar dessutom den Euklidiska vektornormen

$$\|\bar{v}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}\,, \tag{1.2}$$

och matrisnormen

$$\|A\| = \max\,\{|\lambda_i| : \lambda_i \text{ är ett egenvärde till } A\}\,. \tag{1.3}$$

Som antyds i ekvation (1.1) beror matrisen $A(t)$ av tiden $t$. Vi antar att $A$ är begränsad på intervallet $(a, b)$, d v s

$$C = \sup_{t\in(a,b)} \|A(t)\| < \infty\,. \tag{1.4}$$

Vi vet att om vi hittar en matrisvärd funktion $F(t, s)$ av två variabler $t, s \in (a, b)$, som uppfyller villkoren (i-iii) nedan så kan vi konstruera lösningarna till både det homogena och det inhomogena systemet.

$$\forall t_0 : \quad F(t_0, t_0) = Id_n\,, \tag{i}$$

$$\frac{d}{dt}F(t, t_0) = A(t)F(t, t_0)\,, \tag{ii}$$

$$\forall (t, s, t_0) : \quad F(t, s)F(s, t_0) = F(t, t_0)\,. \tag{iii}$$

Ekvationer av typen (1.1) är i allmänhet inte explicit lösbara i den meningen att vi inte kan hitta $F(t, s)$ på explicit form. Det finns emellertid en representation av fundamentalmatrisen som en likformigt konvergent oändlig serie av matrisvärda funktioner, där varje term kan anges explicit. Denna serie ser ut som följer.

$$F(t,t_0) = Id_n + \sum_{l=1}^{\infty} \int_{t_0}^{t} ds_1 A(s_1) \int_{t_0}^{s_1} ds_2 A(s_2) \cdots \int_{t_0}^{s_{l-1}} ds_l A(s_l)\,. \tag{1.5}$$

Vi kommer nedan att bevisa den likformiga konvergensen, och att detta verkligen ger en fundamentallösning. Först studerar vi strukturen hos termerna i serien (1.5).

## 2. Tidsordning

I detta avsnitt studerar vi termerna i serien (1.5). Betrakta först term $l$ i serien, och låt $Q_l$ vara en $l$-dimensionel kub given av,

$$Q_l = \{(s_1, \ldots, s_l) : t_0 \leq s_i \leq t, \quad i = 1, \ldots, l\}\,. \tag{2.1}$$

Term nummer $l$ i serien (1.5) har formen,

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^{t} ds_1 A(s_1) \int_{t_0}^{s_1} ds_2 A(s_2) \cdots \int_{t_0}^{s_{k-1}} ds_l A(s_l) \\ &= \int_{\substack{(s_1,\ldots,s_l)\in Q_l \\ s_1 \geq s_2 \geq \cdots \geq s_l}} ds_1 ds_2 \ldots ds_l A(s_1) \cdot A(s_2) \cdot \cdots \cdot A(s_l)\,. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Vi observerar att matriserna i (2.2) multipliceras i växande tidsordning, d v s vi integrerar över området

$$\{(s_1, \ldots, s_l) \in Q_l : s_1 \geq s_2 \geq \cdots \geq s_l\}\,.$$

Detta är väsentligt eftersom $A(t)$ och $A(s)$ inte nödvändigtvis kommuterar om $t \neq s$. Vi kommer nu att skriva om den $l$:te termen som en integral över hela $Q_l$ av en s k tidsordnad produkt. Detta kommer att underlätta analysen nedan, men har också anknytningar till spridningsteori i kvantmekanik.

Låt $S_l$ vara gruppen av permutationer av mängden $\{1, 2, \ldots, l\}$. För en given $l$-tuple $(s_1, \ldots, s_l) \in Q_l$ finns en permutation $\pi \in S_l$ sådan att

$$s_{\pi_1} \geq s_{\pi_2} \geq \cdots \geq s_{\pi_l}. \tag{2.3}$$

Man inser att om vi betecknar

$$Q_{l,\pi} = \{(s_1, \ldots, s_l) \in Q_l : s_{\pi_1} \geq s_{\pi_2} \geq \cdots \geq s_{\pi_l}\}\,,$$

så har vi

$$Q_l = \cup_{\pi \in S_l} Q_{l,\pi}\,, \tag{2.4}$$

och de olika $Q_{l,\pi}$ endast överlappar på ränderna vilket inte spelar någon roll t ex vid uträkningen av en integral över $Q_l$. Vi har t ex

$$\int_{Q_l} ds_1 ds_2 \dots ds_l A(s_1)\cdot A(s_2)\cdot\dots\cdot A(s_l)$$
$$= \sum_{\pi\in S_l}\int_{Q_{l,\pi}} ds_1 ds_2 \dots ds_l A(s_1)\cdot A(s_2)\cdot\dots\cdot A(s_l)\,. \quad (2.5)$$

Detta ger emellertid inte termerna i serien (1.5) ovan. Vi introducerar en så kallad *tidsordnad matrisprodukt*

$$\overrightarrow{A(s_1)\cdot A(s_2)\cdot\dots\cdot A(s_l)} = A(s_{\pi_1})\cdot A(s_{\pi_2})\cdot\dots\cdot A(s_{\pi_l})\,, \quad (2.6)$$

där $\pi \in S_l$ är en permutation som ordnar $(s_1,\dots,s_l)$ i avtagande följd. Observera att en permutation $\pi$ för vilken $(s_1,\dots,s_l)\in Q_{l,\pi}$ åstadkommer den önskade ordningen. Vi betraktar nu integralen

$$\int_{Q_l} ds_1 ds_2 \dots ds_l \overrightarrow{A(s_1)\cdot A(s_2)\cdot\dots\cdot A(s_l)}$$
$$= \sum_{\pi\in S_l}\int_{Q_{l,\pi}} ds_1 ds_2 \dots ds_l A(s_{\pi_1})\cdot A(s_{\pi_2})\cdot\dots\cdot A(s_{\pi_l})\,. \quad (2.7)$$

Genom variabelsubstitutionen $(s_1,\dots,s_l)\to(s_{\pi_1},\dots,s_{\pi_l})$ ser vi att varje term i summan i ekvation (2.7) är exakt lika med term nummer $l$ i serien (1.5). Eftersom $S_l$ har $l!$ element får vi

$$\int_{t_0}^{t} ds_1 A(s_1)\int_{t_0}^{s_1} ds_2 A(s_2)\cdots\int_{t_0}^{s_{k-1}} ds_l A(s_l)$$
$$= \frac{1}{l!}\int_{Q_l} ds_1 ds_2 \dots ds_l \overrightarrow{A(s_1)\cdot A(s_2)\cdot\dots\cdot A(s_l)}\,,$$

och serien i (1.5) kan skrivas

$$F(t,t_0) = Id_n + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{l!}\int_{(s_1,\dots,s_l)\in Q_l} ds_1 ds_2 \dots ds_l \overrightarrow{A(s_1)\cdot A(s_2)\cdot\dots\cdot A(s_l)}\,, \quad (2.8)$$

där $\overrightarrow{A(s_1)\cdot A(s_2)\cdot\dots\cdot A(s_l)}$ är den tidsordnade produkten i (2.6). Denna serie kallas den *tidsordnande exponentialfunktionen* av matrisen $\int_{t_0}^{t} A(s)ds$, d v s vi har formelt

$$F(t,t_0) = \overrightarrow{\exp}\left(\int_{t_0}^{t} A(s)ds\right)\,. \quad (2.9)$$

## 3. Likformig konvergens

Villkoret i (1.4), d v s

$$\|A(t)\| < C, \qquad t \in (a,b)\,,$$

ger att

$$\begin{aligned}
&\| \int_{(s_1,\dots,s_l)\in Q_l} ds_1 ds_2 \dots ds_l \overrightarrow{A(s_1)\cdot A(s_2)\cdot \dots \cdot A(s_l)} \| \\
&\le \int_{(s_1,\dots,s_l)\in Q_l} ds_1 ds_2 \dots ds_l \|A(s_1)\| \cdot \|A(s_2)\| \cdot \dots \cdot \|A(s_l)\| \\
&\le (b-a)^l C^l\,.
\end{aligned}$$

Varje term i serien (2.8) domineras därför av

$$\frac{((b-a)C)^l}{l!}$$

vilket medför likformig konvergens av serien i (1.5) eller alternativt (2.8) på begränsade tidsinterval.

## 4. Bevis att detta är fundamentallösningen

Det återstår att visa att serien i (1.5) ger en fundamentallösning till systemet i (1.1). Vi måste visa att följande tre påståenden gäller.

$$\forall t_0 : \quad F(t_0,t_0) = Id_n\,, \tag{i}$$

$$\frac{d}{dt}F(t,t_0) = A(t)F(t,t_0)\,, \tag{ii}$$

$$\forall (t,s,t_0) : \quad F(t,s)F(s,t_0) = F(t,t_0)\,. \tag{iii}$$

Påstående (i) visas genom att sätta $t = t_0$ i serien (1.5). Varje term utom den första blir då 0. Detta visar (i). För att få (ii) deriverar vi serien i (1.5) termvis;

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} ds_1 A(s_1) \int_{t_0}^{s_1} ds_2 A(s_2) \cdots \int_{t_0}^{s_{k-1}} ds_l A(s_l) \\
&\qquad = A(t)\int_{t_0}^{t} ds_2 A(s_2) \cdots \int_{t_0}^{s_{k-1}} ds_l A(s_l)\,.
\end{aligned} \tag{4.1}$$

När vi summerar bidragen från varje term får vi

$$\begin{aligned}
&A(t)(Id_n + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{t_0}^{t} ds_1 A(s_1) \int_{t_0}^{s_1} ds_2 A(s_2) \cdots \int_{t_0}^{s_{k-1}} ds_l A(s_l)) \\
&= A(t)F(t,t_0).
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Eftersom serien till vänster i (4.2) igen är likformigt konvergent är termvis derivering tillåten och vi har visat (ii) .

För att visa (iii) måste man inse att varje term i serien (1.5) kan skrivas

$$
\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{t} ds_1 A(s_1) \int_{t_0}^{s_1} ds_2 A(s_2) \cdots \int_{t_0}^{s_{k-1}} ds_l A(s_l) \\
&= \int_{t_0}^{t} ds_1 \int_{s_1}^{t} ds_2 \int_{s_{k-1}}^{t} ds_l A(s_l) \cdot \cdots \cdot A(s_2) \cdot A(s_1) \, .
\end{aligned}
$$

Denna omformulering ger på samma sätt som i (4.2) ovan att

$$
\frac{d}{d(t_0)} F(t, t_0) = -F(t, t_0) A(t_0).
$$

Vi deriverar nu vänsterledet i (iii) med avseende på $s$ och får

$$
\frac{d}{ds} F(t,s) F(s,t_0) = -F(t,s) A(s) F(s,t_0) + F(t,s) A(s) F(s,t_0) = 0.
$$

Matrisprodukten i (iii) beror alltså inte på $s$ och vi får

$$
F(t,s) F(s,t_0) = F(t,t_0) F(t_0,t_0) = F(t,t_0) Id_n = F(t,t_0) \, .
$$

Vi har nu visat (iii).

## 5. Kommuterande systemmatriser

När systemmatrisen $A(t)$ kommuterar vid olika tider, d.v.s.

$$
A(s) A(t) = A(t) A(s), \qquad \text{alla } t \text{ och } s \in (a,b) \, , \tag{5.1}
$$

så är den tidsordnade produkten lika med den vanliga produkten och serien i (2.8) är lika med

$$
\begin{aligned}
F(t,t_0) &= Id_n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{l!} \int_{(s_1,\ldots,s_l) \in Q_l} ds_1 ds_2 \ldots ds_l A(s_1) \cdot A(s_2) \cdot \cdots \cdot A(s_l) \\
&= Id_n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{l!} \int_{t_0}^{t} ds_1 A(s_1) \cdot \int_{t_0}^{t} ds_2 A(s_2) \cdot \cdots \cdot \int_{t_0}^{t} ds_l A(s_l) \qquad (5.2) \\
&= \mathrm{e}^{(\int_{t_0}^{t} A(s) ds)} \, ,
\end{aligned}
$$

d v s fundamentallösningen $F(t,t_0)$ är lika med den vanliga exponentialfunktionen av matrisen $\int_{t_0}^{t} A(s) ds$.

Ett viktigt specialfall av detta är när $A$ inte beror på $t$ utan är en konstant matris. Vi har då

$$
\int_{t_0}^{t} A(s) ds = (t - t_0) A \, , \tag{5.3}
$$

och får

$$
F(t,t_0) = \mathrm{e}^{((t-t_0)A)} \, . \tag{5.4}
$$