Relations entre géométrie des ensembles de Julia et propriétés des orbites critiques

Nicolae Mihalache

KTH, Stockholm

Paris, 4 avril 2008

Les ensembles de Julia et Fatou

Soit $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ une application rationnelle de degré au moins 2.

Les ensembles de Julia et Fatou

Soit $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ une application rationnelle de degré au moins 2.

Définition

*L'**ensemble de Fatou** $\mathcal{F}$ est le plus grand ouvert sur lequel la famille $(f^n)_{n>0}$ est normale. L'**ensemble de Julia** est*

$$\mathcal{J} = \overline{\mathbb{C}} \backslash \mathcal{F}.$$

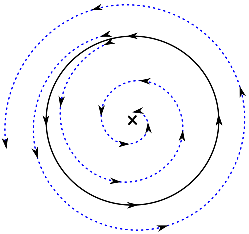
Les ensembles de Julia et Fatou

Soit $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ une application rationnelle de degré au moins 2.

Définition

*L'**ensemble de Fatou** $\mathcal{F}$ est le plus grand ouvert sur lequel la famille $(f^n)_{n>0}$ est normale. L'**ensemble de Julia** est*

$$\mathcal{J} = \overline{\mathbb{C}} \backslash \mathcal{F}.$$



$f(z) = z^2$

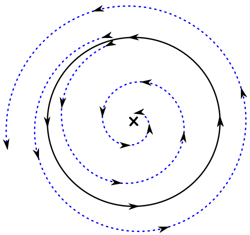
Les ensembles de Julia et Fatou

Soit $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ une application rationnelle de degré au moins 2.

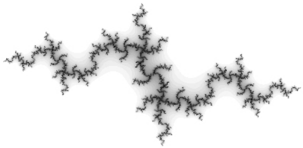
Définition

*L'**ensemble de Fatou** $\mathcal{F}$ est le plus grand ouvert sur lequel la famille $(f^n)_{n>0}$ est normale. L'**ensemble de Julia** est*

$$\mathcal{J} = \overline{\mathbb{C}} \backslash \mathcal{F}.$$



$f(z) = z^2$



$f(z) = z^2 + c_0$

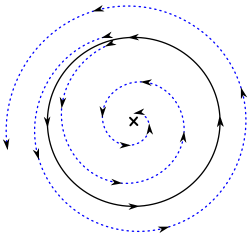
Les ensembles de Julia et Fatou

Soit $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ une application rationnelle de degré au moins 2.

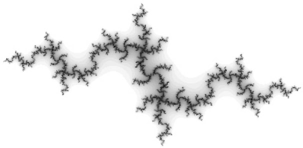
Définition

*L'**ensemble de Fatou** $\mathcal{F}$ est le plus grand ouvert sur lequel la famille $(f^n)_{n>0}$ est normale. L'**ensemble de Julia** est*

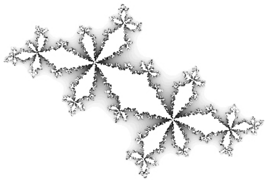
$$\mathcal{J} = \overline{\mathbb{C}} \backslash \mathcal{F}.$$



$f(z) = z^2$



$f(z) = z^2 + c_0$



$f(z) = z^2 + c_1$

Les ensembles de Julia et Fatou

Soit $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ une application rationnelle de degré au moins 2.

Définition

*L'**ensemble de Fatou** $\mathcal{F}$ est le plus grand ouvert sur lequel la famille $(f^n)_{n>0}$ est normale. L'**ensemble de Julia** est*

$$\mathcal{J} = \overline{\mathbb{C}} \backslash \mathcal{F}.$$

Propriétés des ensembles $\mathcal{J}$ et $\mathcal{F}$

- $\mathcal{J}$ est compact parfait non vide
- $\mathcal{J}$ et $\mathcal{F}$ sont totalement invariants
- $\mathcal{J} = \overline{\bigcup_{n>0} f^{-n}(z)}$ pour tout $z \in \mathcal{J}$
- $\mathcal{J}$ est l'adhérence de l'ensemble des orbites périodiques répulsives
- toute composante de $\mathcal{F}$ est périodique ou prépériodique [Sullivan, '85]

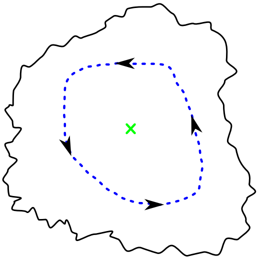
L'ensemble de Fatou et les orbites critiques

Classification des composantes périodiques de $\mathcal{F}$

L'ensemble de Fatou et les orbites critiques

Classification des composantes périodiques de $\mathcal{F}$

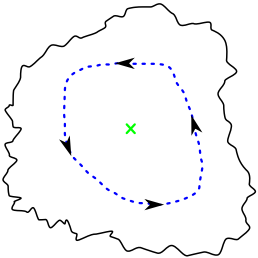
- domaines de rotation (disques de Siegel et anneaux de Herman)

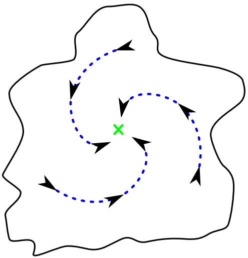


L'ensemble de Fatou et les orbites critiques

Classification des composantes périodiques de $\mathcal{F}$

- domaines de rotation (disques de Siegel et anneaux de Herman)
- cycles attractifs (contiennent une orbite périodique attractive)

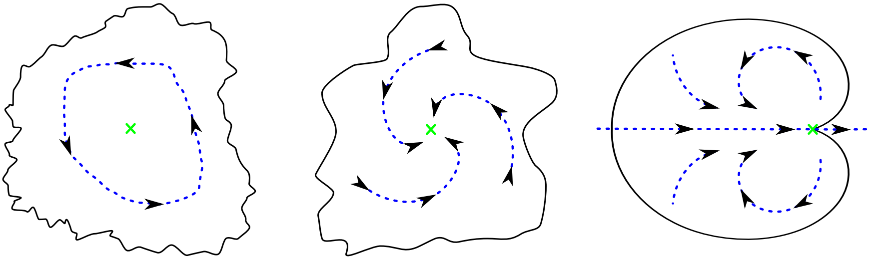




L'ensemble de Fatou et les orbites critiques

Classification des composantes périodiques de $\mathcal{F}$

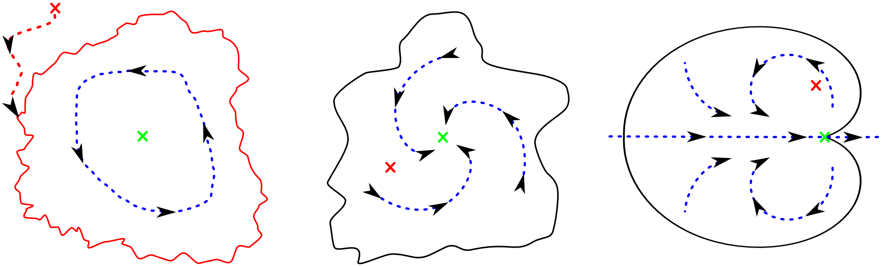
- domaines de rotation (disques de Siegel et anneaux de Herman)
- cycles attractifs (contiennent une orbite périodique attractive)
- cycles paraboliques (la frontière contient une orbite périodique indifférente de multiplicateur rationnel)



L'ensemble de Fatou et les orbites critiques

Classification des composantes périodiques de $\mathcal{F}$

- domaines de rotation (disques de Siegel et anneaux de Herman)
- cycles attractifs (contiennent une orbite périodique attractive)
- cycles paraboliques (la frontière contient une orbite périodique indifférente de multiplicateur rationnel)



L'ensemble de Fatou et les orbites critiques

Classification des composantes périodiques de $\mathcal{F}$

- domaines de rotation (disques de Siegel et anneaux de Herman)
- cycles attractifs (contiennent une orbite périodique attractive)
- cycles paraboliques (la frontière contient une orbite périodique indifférente de multiplicateur rationnel)

L'ensemble critique est

$$\mathrm{Crit} = \left\{c \in \overline{\mathbb{C}} \mid f'(c) = 0\right\}.$$

L'ensemble postcritique est

$$\mathrm{PC} = \{f^n(c) \mid c \in \mathrm{Crit}, n \geq 0\}.$$

L'ensemble de Fatou et les orbites critiques

Classification des composantes périodiques de $\mathcal{F}$

- domaines de rotation (disques de Siegel et anneaux de Herman)
- cycles attractifs (contiennent une orbite périodique attractive)
- cycles paraboliques (la frontière contient une orbite périodique indifférente de multiplicateur rationnel)

L'ensemble critique est

$$\mathrm{Crit} = \left\{c \in \overline{\mathbb{C}} \mid f'(c) = 0\right\}.$$

L'ensemble postcritique est

$$\mathrm{PC} = \{f^n(c) \mid c \in \mathrm{Crit}, n \geq 0\}.$$

Proposition

Soit U une composante périodique de $\mathcal{F}$.

- *si U est un domaine de rotation alors $\partial U \subseteq \overline{\mathrm{PC}}$,*

L'ensemble de Fatou et les orbites critiques

Classification des composantes périodiques de $\mathcal{F}$

- domaines de rotation (disques de Siegel et anneaux de Herman)
- cycles attractifs (contiennent une orbite périodique attractive)
- cycles paraboliques (la frontière contient une orbite périodique indifférente de multiplicateur rationnel)

L'ensemble critique est

$$\mathrm{Crit} = \left\{c \in \overline{\mathbb{C}} \mid f'(c) = 0\right\}.$$

L'ensemble postcritique est

$$\mathrm{PC} = \{f^n(c) \mid c \in \mathrm{Crit}, n \geq 0\}.$$

Proposition

Soit U une composante périodique de $\mathcal{F}$.

- *si U est un domaine de rotation alors $\partial U \subseteq \overline{\mathrm{PC}}$,*
- *sinon il existe $n \geq 0$ tel que $\mathrm{Crit} \cap f^n(U) \neq \emptyset$.*

Hyperbolicité et sous-hyperbolicité

Soit f **sans** cycle **parabolique**. Alors pour tout $c \in \mathrm{Crit} \cap \mathcal{F}$

$$\mathrm{dist}\left(\{f^n(c) \mid n \geq 0\}, \mathcal{J}\right) > 0.$$

Hyperbolicité et sous-hyperbolicité

Soit f **sans** cycle **parabolique**. Alors pour tout $c \in \mathrm{Crit} \cap \mathcal{F}$

$$\mathrm{dist}\left(\{f^n(c) \mid n \geq 0\}, \mathcal{J}\right) > 0.$$

Définition

On appelle f hyperbolique si les conditions équivalentes suivantes sont satisfaites

- $\exists C > 0\ \exists \lambda > 1\ \forall z \in \mathcal{J}\ \forall n \geq 1\ |(f^n)'| > C\lambda^n$.
- $\mathrm{Crit} \cap \mathcal{J} = \emptyset$.

Si f est hyperbolique alors $\mathrm{HDim}(\mathcal{J}) < 2$.

Hyperbolicité et sous-hyperbolicité

Soit f **sans** cycle **parabolique**. Alors pour tout $c \in \mathrm{Crit} \cap \mathcal{F}$

$$\mathrm{dist}\left(\{f^n(c) \mid n \geq 0\}, \mathcal{J}\right) > 0.$$

Définition

On appelle f hyperbolique si les conditions équivalentes suivantes sont satisfaites

- $\exists C > 0\ \exists \lambda > 1\ \forall z \in \mathcal{J}\ \forall n \geq 1\ |(f^n)'| > C\lambda^n$.
- $\mathrm{Crit} \cap \mathcal{J} = \emptyset$.

Si f est hyperbolique alors $\mathrm{HDim}(\mathcal{J}) < 2$.

Définition

On appelle f sous-hyperbolique si $\mathrm{PC} \cap \mathcal{J}$ est fini.

Si f est un polynôme sous-hyperbolique et $\mathcal{J}$ est connexe alors $\mathcal{J}$ est localement connexe.

- Soit f sans cycle parabolique, $\mathrm{Crit}_{\mathcal{J}} = \mathrm{Crit} \cap \mathcal{J}$ et $\mathrm{PC}_{\mathcal{J}} = \mathrm{PC} \cap \mathcal{J}$.

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Crit}_{\mathcal{J}} = \emptyset & & |\mathrm{PC}_{\mathcal{J}}| < \infty \\
\Updownarrow & & \Updownarrow \\
f \ \text{Hyp.} & \Rightarrow & f \ \text{Sous-hyp.} \\
 & & \\
\Downarrow & & \Downarrow \text{ poly.} \\
\mathrm{HD}(\mathcal{J}) < 2 & & \mathcal{J} \text{ l.c.}
\end{array}$$

Semi-hyperbolicité

Définition

On appelle f semi-hyperbolique si pour tout $c \in \mathrm{Crit} \cap \mathcal{J}$, $c \notin \omega(c)$.

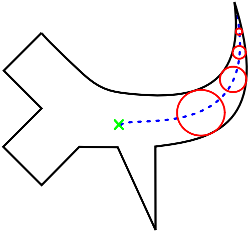
Semi-hyperbolicité

Définition

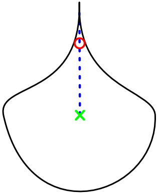
On appelle f semi-hyperbolique si pour tout $c \in \mathrm{Crit} \cap \mathcal{J}$, $c \notin \omega(c)$.

Un domaine Ω est un domaine de John s'il existe $z_0 \in \Omega$ et $\varepsilon > 0$ tels que pour tout $z_1 \in \Omega$ il existe une courbe $\gamma \subseteq \Omega$ qui connecte z_0 à z_1 telle que

$$\forall z \in \gamma \ \ \mathrm{dist}(z, \partial\Omega) \geq \varepsilon \, \mathrm{dist}(z, z_1).$$



John



pas John

Semi-hyperbolicité

Définition

On appelle f semi-hyperbolique si pour tout $c \in \mathrm{Crit} \cap \mathcal{J}$, $c \notin \omega(c)$.

Un domaine Ω est un domaine de John s'il existe $z_0 \in \Omega$ et $\varepsilon > 0$ tels que pour tout $z_1 \in \Omega$ il existe une courbe $\gamma \subseteq \Omega$ qui connecte z_0 à z_1 telle que

$$\forall z \in \gamma \;\; \mathrm{dist}(z, \partial\Omega) \geq \varepsilon\, \mathrm{dist}(z, z_1).$$

Théorème (Carleson, Jones, Yoccoz - '94)

Si f est un polynôme alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- *f est semi-hyperbolique.*
- *Toute composante de $\mathcal{F}$ est un domaine de John.*
- *Il existe $r > 0$, $\lambda > 1$ et $\mu < \infty$ telles que pour tout $z \in \mathcal{J}$, $n \geq 0$ et W une composante de $f^{-n}(B(z, r))$*

$$\deg_W(f^n) \leq \mu \text{ et } \mathrm{diam}\, W \leq \lambda^{-n}.$$

- Soit f sans cycle parabolique, $\mathrm{Crit}_{\mathcal{J}} = \mathrm{Crit} \cap \mathcal{J}$ et $\mathrm{PC}_{\mathcal{J}} = \mathrm{PC} \cap \mathcal{J}$.

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Crit}_{\mathcal{J}} = \emptyset & & |\mathrm{PC}_{\mathcal{J}}| < \infty & & \mathrm{Crit}_{\mathcal{J}} \subseteq \mathrm{NR} \\
\Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow \\
f \text{ Hyp.} & \Rightarrow & f \text{ Sous-hyp.} & \Rightarrow & f \text{ SH} \\
 & & & & [\mathrm{CJY}] \Updownarrow \text{poly.} \\
\Downarrow & & \Downarrow \text{poly.} & & \mathcal{F} \text{ John} \\
\mathrm{HD}(\mathcal{J}) < 2 & & \mathcal{J} \text{ l.c.} & &
\end{array}$$

La condition de Collet-Eckmann

Définition

On appelle f Collet-Eckmann s'il existe $C > 0$ et $\lambda > 1$ telles que

$$\forall c \in \mathrm{Crit} \cap \mathcal{J}\ \forall n \geq 1 \qquad |(f^n)'(f(c))| > C\lambda^n.$$

La condition de Collet-Eckmann

Définition

On appelle f Collet-Eckmann s'il existe $C > 0$ et $\lambda > 1$ telles que

$$\forall c \in \mathrm{Crit} \cap \mathcal{J} \ \forall n \geq 1 \qquad |(f^n)'(f(c))| > C\lambda^n.$$

Un domaine Ω simplement connexe est un domaine de Hölder si l'application de Riemann $\phi : \mathbb{D} \to \Omega$ s'étend à une application Hölder continue sur $\overline{\mathbb{D}}$. Cette définition peut être généralisée pour tout domaine.

$$\Omega \text{ John } \Rightarrow \Omega \text{ Hölder}$$

La condition de Collet-Eckmann

Définition

On appelle f Collet-Eckmann s'il existe $C > 0$ et $\lambda > 1$ telles que

$$\forall c \in \mathrm{Crit} \cap \mathcal{J} \ \forall n \geq 1 \qquad |(f^n)'(f(c))| > C\lambda^n.$$

Un domaine Ω simplement connexe est un domaine de Hölder si l'application de Riemann $\phi : \mathbb{D} \to \Omega$ s'étend à une application Hölder continue sur $\overline{\mathbb{D}}$. Cette définition peut être généralisée pour tout domaine.

$$\Omega \text{ John } \Rightarrow \Omega \text{ Hölder}$$

Théorème (Graczyk, Smirnov - '98)

Si f est Collet-Eckmann alors toutes les composantes de l'ensemble de Fatou sont des domaines de Hölder.

Si f est un polynôme et $\mathcal{F}$ est Hölder alors $\mathrm{HDim}(\mathcal{J}) < 2$. Si de plus $\mathcal{J}$ est connexe alors $\mathcal{J}$ est localement connexe.

- Soit f sans cycle parabolique, $\mathrm{Crit}_{\mathcal{J}} = \mathrm{Crit} \cap \mathcal{J}$ et $\mathrm{PC}_{\mathcal{J}} = \mathrm{PC} \cap \mathcal{J}$.

$$
\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{Crit}_{\mathcal{J}} = \emptyset & & |\mathrm{PC}_{\mathcal{J}}| < \infty & & \mathrm{Crit}_{\mathcal{J}} \subseteq \mathrm{NR} & & \mathrm{Crit}_{\mathcal{J}} \subseteq \mathrm{CE} \\
\Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow \\
f \text{ Hyp.} & \Rightarrow & f \text{ Sous-hyp.} & \Rightarrow & f \text{ SH} & \overset{z^d+c}{\Rightarrow} & f \ \color{red}{\mathrm{CE}} \\
 & & & & \color{blue}{[\mathrm{CJY}]} \Updownarrow \text{poly.} & & \color{blue}{[\mathrm{GS}]} \ \color{red}{\Downarrow} \\
\Downarrow & & \Downarrow \text{ poly.} & & \mathcal{F} \text{ John} & \Rightarrow & \color{red}{\mathcal{F} \text{ Hölder}} \\
\mathrm{HD}(\mathcal{J}) < 2 & & \mathcal{J} \text{ l.c.} & & & \overset{\text{poly.}}{\color{red}{\Longleftarrow}} &
\end{array}
$$

Conditions équivalentes à la régularité Hölder de $\mathcal{F}$

Théorème (Przytycki, Rivera-Letelier, Smirnov - '03)

Les conditions suivantes impliquent l'absence d'orbites paraboliques, elles sont équivalentes et invariantes par conjugaison topologique :

$\mathrm{CE}_2(z_0)$ *Il existe $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$, $C > 0$ et $\lambda > 1$ tels que pour tout $n \geq 1$ et $w \in f^{-n}(z_0)$*

$$|(f^n)'(w)| > C\lambda^n.$$

UHP *Il existe $\lambda > 1$ telle que tout point périodique répulsif p de période $n \geq 1$ satisfait $|(f^n)'(p)| > \lambda^n$.*

$\mathrm{ExpShrink}$ *Il existe $r > 0$ et $\lambda > 1$ telles que pour tout $z \in \mathcal{J}$, $n \geq 0$ et W une composante de $f^{-n}(B(z,r))$*

$$\mathrm{diam}\, W \leq \lambda^{-n}.$$

Consequence : En utilisant aussi des résultats de Graczyk et Smirnov, en présence des cycles attractifs, ces conditions sont équivalentes à la régularité Hölder des composantes de $\mathcal{F}$.

- Soit f sans cycle parabolique, $\mathrm{Crit}_{\mathcal{J}} = \mathrm{Crit} \cap \mathcal{J}$ et $\mathrm{PC}_{\mathcal{J}} = \mathrm{PC} \cap \mathcal{J}$.

$$
\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{Crit}_{\mathcal{J}} = \emptyset & & |\mathrm{PC}_{\mathcal{J}}| < \infty & & \mathrm{Crit}_{\mathcal{J}} \subseteq \mathrm{NR} & & \mathrm{Crit}_{\mathcal{J}} \subseteq \mathrm{CE} \\
\Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow \\
f \text{ Hyp.} & \Rightarrow & f \text{ Sous-hyp.} & \Rightarrow & f \text{ SH} & \overset{z^d+c}{\Rightarrow} & f \text{ CE} \\
 & & & & \text{[CJY]} \Updownarrow \text{ poly.} & & \text{[GS]} \Downarrow \\
\Downarrow & & \Downarrow \text{ poly.} & & \mathcal{F} \text{ John} & \Rightarrow & \mathcal{F} \text{ Hölder} \\
\mathrm{HD}(\mathcal{J}) < 2 & & \mathcal{J} \text{ l.c.} & & & \overset{\text{poly.}}{\Longleftarrow} &
\end{array}
$$

$$
\left.\begin{array}{l} \mathrm{SH} \Rightarrow \\ \mathrm{CE} \Rightarrow \end{array}\right\} \text{Hölder} \Leftrightarrow \mathrm{CE}_2(z_0) \Leftrightarrow \mathrm{UHP} \Leftrightarrow \mathrm{ExpShrink} \Leftrightarrow \mathrm{TCE} \text{ [PRS]}
$$

Invariance topologique et contre-exemples

Théorème (Nowicki, Przytycki, Sands - '98)

La condition de Collet-Eckmann pour les applications S-unimodales est invariante par conjugaison topologique.

Invariance topologique et contre-exemples

Théorème (Nowicki, Przytycki, Sands - '98)

La condition de Collet-Eckmann pour les applications S-unimodales est invariante par conjugaison topologique.

Théorème (Przytycki - '00)

Si $|\operatorname{Crit} \cap \mathcal{J}| = 1$ *et* $\mathcal{F}$ *est Hölder, alors* f *est Collet-Eckmann.*

Invariance topologique et contre-exemples

Théorème (Nowicki, Przytycki, Sands - '98)

La condition de Collet-Eckmann pour les applications S-unimodales est invariante par conjugaison topologique.

Théorème (Przytycki - '00)

Si $|\mathrm{Crit} \cap \mathcal{J}| = 1$ *et* $\mathcal{F}$ *est Hölder, alors* f *est Collet-Eckmann.*

On dispose de contre-exemples semi-hyperboliques pour l'invariance topologique de la condition de Collet-Eckmann.

Invariance topologique et contre-exemples

Théorème (Nowicki, Przytycki, Sands - '98)

La condition de Collet-Eckmann pour les applications S-unimodales est invariante par conjugaison topologique.

Théorème (Przytycki - '00)

Si $|\mathrm{Crit} \cap \mathcal{J}| = 1$ *et* $\mathcal{F}$ *est Hölder, alors* f *est Collet-Eckmann.*

On dispose de contre-exemples semi-hyperboliques pour l'invariance topologique de la condition de Collet-Eckmann.

Conjecture (Świątek - '99)

La condition de Collet-Eckmann pour les points critiques récurrents des applications S-multimodales est invariante par conjugaison topologique.

- Soit f sans cycle parabolique, $\mathrm{Crit}_{\mathcal{J}} = \mathrm{Crit} \cap \mathcal{J}$ et $\mathrm{PC}_{\mathcal{J}} = \mathrm{PC} \cap \mathcal{J}$.

$$
\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{Crit}_{\mathcal{J}} = \emptyset & & |\mathrm{PC}_{\mathcal{J}}| < \infty & & \mathrm{Crit}_{\mathcal{J}} \subseteq \mathrm{NR} & & \mathrm{Crit}_{\mathcal{J}} \subseteq \mathrm{CE} \\
\Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow \\
f \text{ Hyp.} & \Rightarrow & f \text{ Sous-hyp.} & \Rightarrow & f \text{ SH} & \xRightarrow{z^d+c} & f \text{ CE} \\
 & & & & \text{[CJY]} \Updownarrow \text{poly.} & & \text{[GS]} \Downarrow \\
\Downarrow & & \Downarrow \text{poly.} & & \mathcal{F} \text{ John} & \Rightarrow & \mathcal{F} \text{ Hölder} \\
\mathrm{HD}(\mathcal{J}) < 2 & & \mathcal{J} \text{ l.c.} & & & \xLeftarrow{\text{poly.}} &
\end{array}
$$

$$
\left.\begin{array}{l} \mathrm{SH} \Rightarrow \\ \mathrm{CE} \Rightarrow \end{array}\right\} \text{Hölder} \Leftrightarrow \mathrm{CE}_2(z_0) \Leftrightarrow \mathrm{UHP} \Leftrightarrow \mathrm{ExpShrink} \Leftrightarrow \mathrm{TCE} \ \text{[PRS]}
$$

Invariance topologique.

Dynamique	Hyp., SH, TCE	CE	RCE
S-unimodale	Oui	Oui [NPSa]	-
$z^d + c$	Oui	Oui [P]	-
S-multimodale	Oui	Non (SH)	? Oui [Św]
rationnelle	Oui	Non (SH)	?

La condition de Collet-Eckmann pour les orbites critiques récurrentes

On dit que f satisfait à la condition de Collet-Eckmann pour les orbites critiques récurrentes (RCE) s'il existe $C > 0$ et $\lambda > 1$ telles que pour tout $c \in \mathrm{Crit} \cap \mathcal{J}$ récurrent $(c \in \omega(c))$ et tout $n \geq 1$

$$|(f^n)'(f(c))| > C\lambda^n.$$

La condition de Collet-Eckmann pour les orbites critiques récurrentes

On dit que f satisfait à la condition de Collet-Eckmann pour les orbites critiques récurrentes (RCE) s'il existe $C > 0$ et $\lambda > 1$ telles que pour tout $c \in \mathrm{Crit} \cap \mathcal{J}$ récurrent ($c \in \omega(c)$) et tout $n \geq 1$

$$|(f^n)'(f(c))| > C\lambda^n.$$

Théorème (N.M.)

$$\mathrm{RCE} \Rightarrow \textit{Hölder}.$$

La condition de Collet-Eckmann pour les orbites critiques récurrentes

On dit que f satisfait à la condition de Collet-Eckmann pour les orbites critiques récurrentes (RCE) s'il existe $C > 0$ et $\lambda > 1$ telles que pour tout $c \in \mathrm{Crit} \cap \mathcal{J}$ récurrent $(c \in \omega(c))$ et tout $n \geq 1$

$$|(f^n)'(f(c))| > C\lambda^n.$$

Théorème (N.M.)

$$\mathrm{RCE} \Rightarrow \textit{Hölder}.$$

Théorème (N.M.)

Il existe un polynôme réel Hölder de degré 3 qui n'est pas RCE.

La condition de Collet-Eckmann pour les orbites critiques récurrentes

On dit que f satisfait à la condition de Collet-Eckmann pour les orbites critiques récurrentes (RCE) s'il existe $C > 0$ et $\lambda > 1$ telles que pour tout $c \in \mathrm{Crit} \cap \mathcal{J}$ récurrent $(c \in \omega(c))$ et tout $n \geq 1$

$$|(f^n)'(f(c))| > C\lambda^n.$$

Théorème (N.M.)

$$\mathrm{RCE} \Rightarrow \textit{Hölder}.$$

Théorème (N.M.)

Il existe un polynôme réel Hölder de degré 3 qui n'est pas RCE.

Théorème (N.M.)

La condition RCE *n'est pas invariante par conjugaison topologique dans la classe des applications 2-modales avec dérivée Schwarzienne négative.*

- Soit f sans cycle parabolique, $\mathrm{Crit}_{\mathcal{J}} = \mathrm{Crit} \cap \mathcal{J}$ et $\mathrm{PC}_{\mathcal{J}} = \mathrm{PC} \cap \mathcal{J}$.

$$
\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{Crit}_{\mathcal{J}} = \emptyset & & |\mathrm{PC}_{\mathcal{J}}| < \infty & & \mathrm{Crit}_{\mathcal{J}} \subseteq \mathrm{NR} & & \mathrm{Crit}_{\mathcal{J}} \subseteq \mathrm{CE} \\
\Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow \\
f \text{ Hyp.} & \Rightarrow & f \text{ Sous-hyp.} & \Rightarrow & f \text{ SH} & \overset{z^d+c}{\Rightarrow} & f \text{ CE} \\
 & & & & \text{[CJY]} \Updownarrow \text{poly.} & & \text{[GS]} \Downarrow \\
\Downarrow & & \Downarrow \text{poly.} & & \mathcal{F} \text{ John} & \Rightarrow & \mathcal{F} \text{ Hölder} \\
 & & & & & \text{poly.} & \\
\mathrm{HD}(\mathcal{J}) < 2 & & \mathcal{J} \text{ l.c.} & & & \Longleftarrow &
\end{array}
$$

$$
\left.\begin{array}{l} \mathrm{SH} \Rightarrow \\ \mathrm{CE} \Rightarrow \end{array}\right\} \mathrm{RCE} \Rightarrow \text{Hölder} \Leftrightarrow \mathrm{CE}_2(z_0) \Leftrightarrow \mathrm{ExpShrink} \Leftrightarrow \mathrm{TCE} \ \text{[PRS]}
$$

Invariance topologique.

Dynamique	Hyp., SH, TCE	CE	RCE
S-unimodale	Oui	Oui [NPSa]	-
$z^d + c$	Oui	Oui [P]	-
S-multimodale	Oui	Non (SH)	Non
rationnelle	Oui	Non (SH)	?

- Soit f sans cycle parabolique, $\mathrm{Crit}_{\mathcal{J}} = \mathrm{Crit} \cap \mathcal{J}$ et $\mathrm{PC}_{\mathcal{J}} = \mathrm{PC} \cap \mathcal{J}$.

$$
\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{Crit}_{\mathcal{J}} = \emptyset & & |\mathrm{PC}_{\mathcal{J}}| < \infty & & \mathrm{Crit}_{\mathcal{J}} \subseteq \mathrm{NR} & & \mathrm{Crit}_{\mathcal{J}} \subseteq \mathrm{CE} \\
\Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow \\
f \ \mathrm{Hyp.} & \Rightarrow & f \ \text{Sous-hyp.} & \Rightarrow & f \ \mathrm{SH} & \overset{z^d+c}{\Rightarrow} & f \ \mathrm{CE} \\
 & & & & \text{[CJY]} \Updownarrow \text{poly.} & & \text{[GS]} \Downarrow \\
\Downarrow & & \Downarrow \text{poly.} & & \mathcal{F} \ \text{John} & \Rightarrow & \mathcal{F} \ \text{Hölder} \\
\mathrm{HD}(\mathcal{J}) < 2 & & \mathcal{J} \ \text{l.c.} & & & \overset{\text{poly.}}{\Longleftarrow} &
\end{array}
$$

$$
\left.\begin{array}{l} \mathrm{SH} \Rightarrow \\ \mathrm{CE} \Rightarrow \end{array}\right\} \mathrm{RCE} \Rightarrow \text{Hölder} \ \Leftrightarrow \mathrm{CE}_2(z_0) \Leftrightarrow \mathrm{ExpShrink} \Leftrightarrow \mathrm{TCE} \ \text{[PRS]}
$$

Invariance topologique.

Dynamique	Hyp., SH, TCE	CE	RCE
S-unimodale	Oui	Oui [NPSa]	-
$z^d + c$	Oui	Oui [P]	-
S-multimodale	Oui	Non (SH)	Non
rationnelle	Oui	Non (SH)	?

Régularité John et connectivité locale de $\mathcal{J}$

Un compact connexe $K\subseteq\overline{\mathbb{C}}$ est appelé localement connexe si pour tout $\tau > 0$ il existe $\theta > 0$ telle que si $a, b \in K$ avec $\delta(a, b) < \theta$ alors il existe un continuum $B\subseteq K$ tel que

$$a, b \in B \text{ et } \operatorname{diam} B < \tau.$$

Régularité John et connectivité locale de $\mathcal{J}$

Un compact connexe $K \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ est appelé localement connexe si pour tout $\tau > 0$ il existe $\theta > 0$ telle que si $a, b \in K$ avec $\delta(a, b) < \theta$ alors il existe un continuum $B \subseteq K$ tel que

$$a, b \in B \text{ et } \operatorname{diam} B < \tau.$$

Théorème (N.M.)

Si f est une application rationnelle semi-hyperbolique alors les composantes de $\mathcal{F}$ sont de domaines de John. Si de plus $\mathcal{J}$ est connexe alors la régularité John est uniforme et $\mathcal{J}$ est localement connexe.

Régularité John et connectivité locale de $\mathcal{J}$

Un compact connexe $K \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ est appelé localement connexe si pour tout $\tau > 0$ il existe $\theta > 0$ telle que si $a, b \in K$ avec $\delta(a, b) < \theta$ alors il existe un continuum $B \subseteq K$ tel que

$$a, b \in B \text{ et } \operatorname{diam} B < \tau.$$

Théorème (N.M.)

Si f est une application rationnelle semi-hyperbolique alors les composantes de $\mathcal{F}$ sont de domaines de John. Si de plus $\mathcal{J}$ est connexe alors la régularité John est uniforme et $\mathcal{J}$ est localement connexe.

Corollaire

Soit f est une application rationnelle qui satisfait à ExpShrink. *Si $\mathcal{J}$ est connexe alors il est localement connexe.*

- Soit f sans cycle parabolique, $\mathrm{Crit}_{\mathcal{J}} = \mathrm{Crit} \cap \mathcal{J}$ et $\mathrm{PC}_{\mathcal{J}} = \mathrm{PC} \cap \mathcal{J}$.

$$
\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{Crit}_{\mathcal{J}} = \emptyset & & |\mathrm{PC}_{\mathcal{J}}| < \infty & & \mathrm{Crit}_{\mathcal{J}} \subseteq \mathrm{NR} & & \mathrm{Crit}_{\mathcal{J}} \subseteq \mathrm{CE} \\
\Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow \\
f \text{ Hyp.} & \Rightarrow & f \text{ Sous-hyp.} & \Rightarrow & f \text{ SH} & \overset{z^d+c}{\Rightarrow} & f \text{ CE} \\
 & & & & \Downarrow & & \text{[GS]} \Downarrow \\
 & & \Downarrow & & \mathcal{F} \text{ John} & \Rightarrow & \mathcal{F} \text{ Hölder} \\
 & & \mathcal{J} \text{ l.c.} & & & \Longleftarrow &
\end{array}
$$

$$
\left.\begin{array}{l}\mathrm{SH} \Rightarrow \\ \mathrm{CE} \Rightarrow\end{array}\right\} \mathrm{RCE} \Rightarrow \text{Hölder} \Leftrightarrow \mathrm{CE}_2(z_0) \Leftrightarrow \mathrm{ExpShrink} \Leftrightarrow \mathrm{TCE} \text{ [PRS]}
$$

Invariance topologique.

Dynamique	Hyp., SH, TCE	CE	RCE
S-unimodale	Oui	Oui [NPSa]	-
$z^d + c$	Oui	Oui [P]	-
S-multimodale	Oui	Non (SH)	Non
rationnelle	Oui	Non (SH)	?

Distorsion

Lemme de Koebe

Soit $g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ *une application holomorphe univalente du disque unité dans le plan complexe. L'image* $g(\mathbb{D})$ *contient le disque* $B\left(g(0), \frac{1}{4}|g'(0)|\right)$ *et pour tout* $z \in \mathbb{D}$ *on a*

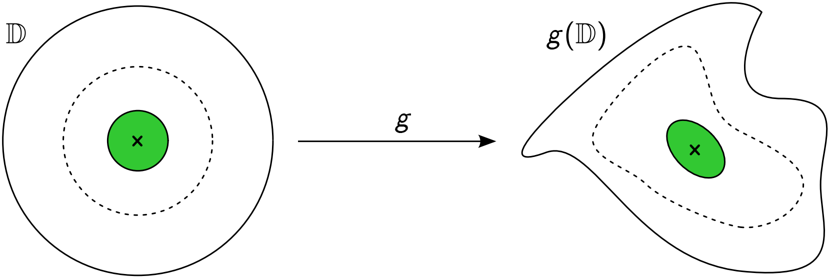
$$\frac{(1-|z|)}{(1+|z|)^3} \leq \frac{|g'(z)|}{|g'(0)|} \leq \frac{(1+|z|)}{(1-|z|)^3}.$$

Distorsion

Lemme de Koebe

Soit $g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ *une application holomorphe univalente du disque unité dans le plan complexe. L'image* $g(\mathbb{D})$ *contient le disque* $B\left(g(0), \frac{1}{4}|g'(0)|\right)$ *et pour tout* $z \in \mathbb{D}$ *on a*

$$\frac{(1-|z|)}{(1+|z|)^3} \leq \frac{|g'(z)|}{|g'(0)|} \leq \frac{(1+|z|)}{(1-|z|)^3}.$$

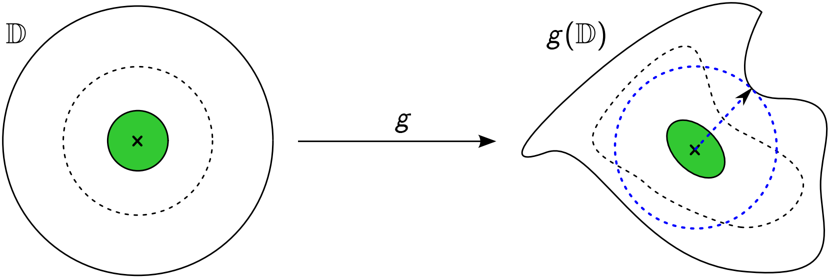


Distorsion

Lemme de Koebe

Soit $g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ *une application holomorphe univalente du disque unité dans le plan complexe. L'image* $g(\mathbb{D})$ *contient le disque* $B\left(g(0), \frac{1}{4}|g'(0)|\right)$ *et pour tout* $z \in \mathbb{D}$ *on a*

$$\frac{(1-|z|)}{(1+|z|)^3} \leq \frac{|g'(z)|}{|g'(0)|} \leq \frac{(1+|z|)}{(1-|z|)^3}.$$

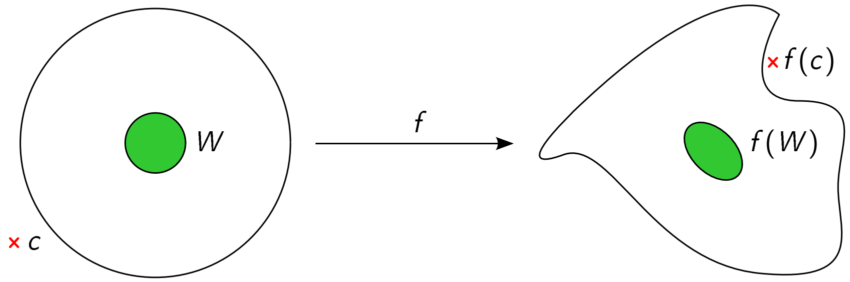


Distorsion

Lemme de Koebe

Soit $g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ une application holomorphe univalente du disque unité dans le plan complexe. L'image $g(\mathbb{D})$ contient le disque $B\left(g(0), \frac{1}{4}|g'(0)|\right)$ et pour tout $z \in \mathbb{D}$ on a

$$\frac{(1-|z|)}{(1+|z|)^3} \leq \frac{|g'(z)|}{|g'(0)|} \leq \frac{(1+|z|)}{(1-|z|)^3}.$$



Distorsion

Lemme de Koebe

Soit $g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ *une application holomorphe univalente du disque unité dans le plan complexe. L'image* $g(\mathbb{D})$ *contient le disque* $B\left(g(0), \frac{1}{4}|g'(0)|\right)$ *et pour tout* $z \in \mathbb{D}$ *on a*

$$\frac{(1-|z|)}{(1+|z|)^3} \leq \frac{|g'(z)|}{|g'(0)|} \leq \frac{(1+|z|)}{(1-|z|)^3}.$$

Corollaire

Pour tout $D > 1$ *il existe* $\varepsilon > 0$ *qui ne dépend pas de* f *tel que pour tout ouvert connexe* W *avec* $\operatorname{diam} W \leq \varepsilon \operatorname{dist}(W, \mathrm{Crit})$

$$\sup_{x,y \in \overline{W}} \left| \frac{f'(x)}{f'(y)} \right| \leq D.$$

Esquisse de la preuve du Théorème CJY

Théorème (Carleson, Jones, Yoccoz - '94)

Si f est un polynôme alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- *f est semi-hyperbolique.*
- *Toute composante de $\mathcal{F}$ est un domaine de John.*
- *Il existe $r > 0$, $\lambda > 1$ et $\mu < \infty$ telles que pour tout $z \in \mathcal{J}$, $n \geq 0$ et W une composante de $f^{-n}(B(z,r))$*

$$\deg_W(f^n) \leq \mu \text{ et } \operatorname{diam} W \leq \lambda^{-n}.$$

Esquisse de la preuve du Théorème CJY

Lemme (distorsion géométrique)

Pour tout $\mu \geq 1$ *il existe* $0 < \tau_\mu < 1$ *et* $0 < C_\mu$ *telles que pour tout polynôme* f, $R > 0$, $z \in \mathbb{C}$, $W = B(z, 2R)^{-1}$ *et* $W' = B(z, R)^{-1} \subseteq W$, *si* $\deg_W f \leq \mu$ *alors*

$$\operatorname{diam} W' < \tau_\mu \operatorname{diam} W \text{ et}$$

$$\operatorname{dist}(z', \partial W') > C_\mu \operatorname{diam} W'.$$

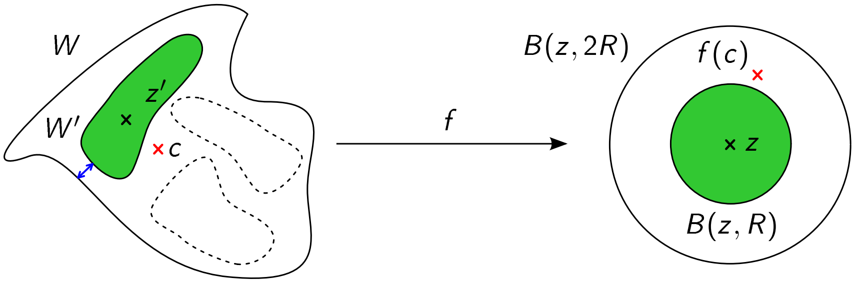
Esquisse de la preuve du Théorème CJY

Lemme (distorsion géométrique)

Pour tout $\mu \geq 1$ il existe $0 < \tau_\mu < 1$ et $0 < C_\mu$ telles que pour tout polynôme f, $R > 0$, $z \in \mathbb{C}$, $W = B(z, 2R)^{-1}$ et $W' = B(z, R)^{-1} \subseteq W$, si $\deg_W f \leq \mu$ alors

$$\operatorname{diam} W' < \tau_\mu \operatorname{diam} W \quad \text{et}$$

$$\operatorname{dist}(z', \partial W') > C_\mu \operatorname{diam} W'.$$



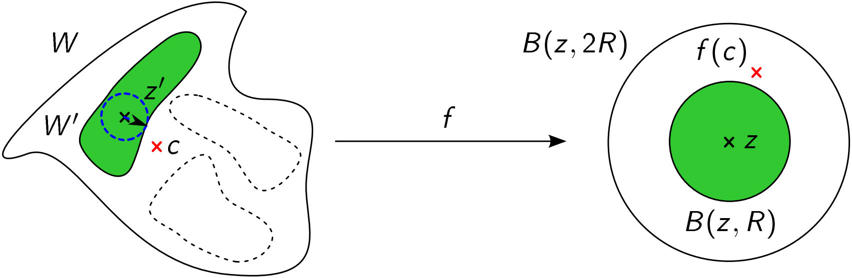
Esquisse de la preuve du Théorème CJY

Lemme (distorsion géométrique)

Pour tout $\mu \geq 1$ *il existe* $0 < \tau_\mu < 1$ *et* $0 < C_\mu$ *telles que pour tout* *polynôme* f, $R > 0$, $z \in \mathbb{C}$, $W = B(z, 2R)^{-1}$ *et* $W' = B(z, R)^{-1} \subseteq W$, *si* $\deg_W f \leq \mu$ *alors*

$$\operatorname{diam} W' < \tau_\mu \operatorname{diam} W \text{ et}$$

$$\operatorname{dist}(z', \partial W') > C_\mu \operatorname{diam} W'.$$



Esquisse de la preuve du Théorème CJY

Lemme (distorsion géométrique)

Pour tout $\mu \geq 1$ *il existe* $0 < \tau_\mu < 1$ *et* $0 < C_\mu$ *telles que pour tout polynôme* f, $R > 0$, $z \in \mathbb{C}$, $W = B(z, 2R)^{-1}$ *et* $W' = B(z, R)^{-1} \subseteq W$, *si* $\deg_W f \leq \mu$ *alors*

$$\operatorname{diam} W' < \tau_\mu \operatorname{diam} W \text{ et}$$

$$\operatorname{dist}(z', \partial W') > C_\mu \operatorname{diam} W'.$$

- il existe $\varepsilon > 0$ et $\mu \geq 1$ tels que pour tout $z \in \mathcal{J}$ si $W = B(z, r)^{-n}$ et $\operatorname{diam} f^i(W) < \varepsilon$ pour $i = 0, \ldots, n-1$ alors

$$\deg_W f^n \leq \mu.$$

Esquisse de la preuve du Théorème CJY

Lemme (distorsion géométrique)

Pour tout $\mu \geq 1$ il existe $0 < \tau_\mu < 1$ et $0 < C_\mu$ telles que pour tout polynôme f, $R > 0$, $z \in \mathbb{C}$, $W = B(z, 2R)^{-1}$ et $W' = B(z, R)^{-1} \subseteq W$, si $\deg_W f \leq \mu$ alors

$$\operatorname{diam} W' < \tau_\mu \operatorname{diam} W \text{ et}$$

$$\operatorname{dist}(z', \partial W') > C_\mu \operatorname{diam} W'.$$

- il existe $\varepsilon > 0$ et $\mu \geq 1$ tels que pour tout $z \in \mathcal{J}$ si $W = B(z, r)^{-n}$ et $\operatorname{diam} f^i(W) < \varepsilon$ pour $i = 0, \ldots, n-1$ alors

$$\deg_W f^n \leq \mu.$$

Définition

On appelle f stable en arrière si

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall z \in \mathcal{J} \; \forall n \geq 1 \; \operatorname{diam} B(z, \delta)^{-n} < \varepsilon.$$

Un argument de compacité

- si U ouvert et $U \cap \mathcal{J} \neq \emptyset$ il existe $N > 0$ tel que $\mathcal{J} \subseteq f^N(U)$.

Un argument de compacité

- si U ouvert et $U \cap \mathcal{J} \neq \emptyset$ il existe $N > 0$ tel que $\mathcal{J} \subseteq f^N(U)$.
- si pour tout $n \geq 1$, $z_n \in \mathcal{J}$, $r_n > 0$ et $\mathcal{J} \not\subseteq f^n(B(z_n, r_n))$ alors

$$\lim_{n \to \infty} r_n = 0.$$

Un argument de compacité

- si U ouvert et $U \cap \mathcal{J} \neq \emptyset$ il existe $N > 0$ tel que $\mathcal{J} \subseteq f^N(U)$.
- si pour tout $n \geq 1$, $z_n \in \mathcal{J}$, $r_n > 0$ et $\mathcal{J} \not\subseteq f^n(B(z_n, r_n))$ alors
$$\lim_{n \to \infty} r_n = 0.$$
- si f est stable en arrière alors il existe $L > 0$ tel que
$$\operatorname{diam} B(z, \delta/2)^{-L} < \frac{\delta}{4}, \ \forall z \in \mathcal{J}.$$

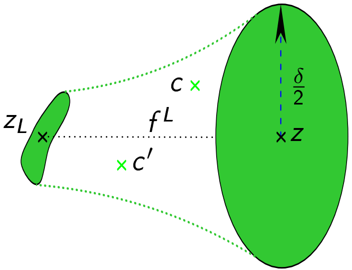
Un argument de compacité

- si U ouvert et $U \cap \mathcal{J} \neq \emptyset$ il existe $N > 0$ tel que $\mathcal{J} \subseteq f^N(U)$.
- si pour tout $n \geq 1$, $z_n \in \mathcal{J}$, $r_n > 0$ et $\mathcal{J} \not\subseteq f^n(B(z_n, r_n))$ alors

$$\lim_{n \to \infty} r_n = 0.$$

- si f est stable en arrière alors il existe $L > 0$ tel que

$$\operatorname{diam} B(z, \delta/2)^{-L} < \frac{\delta}{4}, \ \forall z \in \mathcal{J}.$$



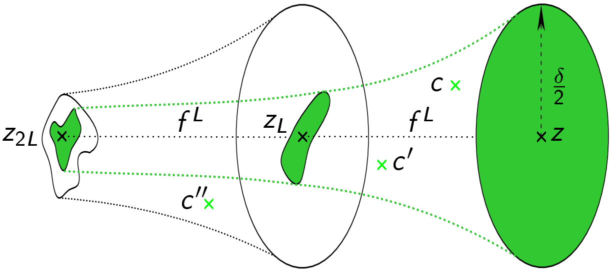
Un argument de compacité

- si U ouvert et $U \cap \mathcal{J} \neq \emptyset$ il existe $N > 0$ tel que $\mathcal{J} \subseteq f^N(U)$.
- si pour tout $n \geq 1$, $z_n \in \mathcal{J}$, $r_n > 0$ et $\mathcal{J} \not\subseteq f^n(B(z_n, r_n))$ alors

$$\lim_{n\to\infty} r_n = 0.$$

- si f est stable en arrière alors il existe $L > 0$ tel que

$$\operatorname{diam} B(z, \delta/2)^{-L} < \frac{\delta}{4}, \ \forall z \in \mathcal{J}.$$



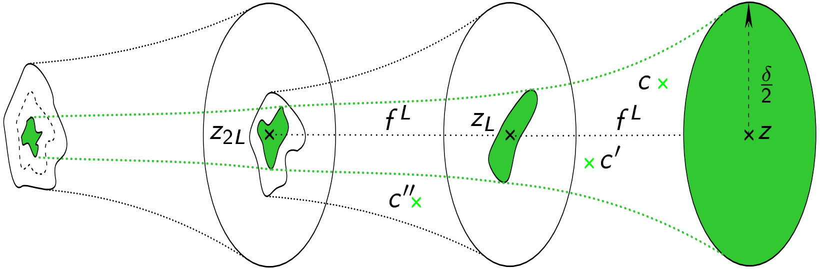
Un argument de compacité

- si U ouvert et $U \cap \mathcal{J} \neq \emptyset$ il existe $N > 0$ tel que $\mathcal{J} \subseteq f^N(U)$.
- si pour tout $n \geq 1$, $z_n \in \mathcal{J}$, $r_n > 0$ et $\mathcal{J} \not\subseteq f^n(B(z_n, r_n))$ alors

$$\lim_{n\to\infty} r_n = 0.$$

- si f est stable en arrière alors il existe $L > 0$ tel que

$$\operatorname{diam} B(z, \delta/2)^{-L} < \frac{\delta}{4}, \ \forall z \in \mathcal{J}.$$



Un argument de compacité

- si U ouvert et $U \cap \mathcal{J} \neq \emptyset$ il existe $N > 0$ tel que $\mathcal{J} \subseteq f^N(U)$.
- si pour tout $n \geq 1$, $z_n \in \mathcal{J}$, $r_n > 0$ et $\mathcal{J} \not\subseteq f^n(B(z_n, r_n))$ alors
$$\lim_{n\to\infty} r_n = 0.$$
- si f est stable en arrière alors il existe $L > 0$ tel que
$$\operatorname{diam} B(z, \delta/2)^{-L} < \frac{\delta}{4}, \ \forall z \in \mathcal{J}.$$
- par une construction du type télescope, pour tout $z \in \mathcal{J}$ et $k \geq 1$
$$\operatorname{diam} B(z, \delta/2)^{-kL} < \tau_\mu^k \delta.$$

Un argument de compacité

- si U ouvert et $U \cap \mathcal{J} \neq \emptyset$ il existe $N > 0$ tel que $\mathcal{J} \subseteq f^N(U)$.
- si pour tout $n \geq 1$, $z_n \in \mathcal{J}$, $r_n > 0$ et $\mathcal{J} \not\subseteq f^n(B(z_n, r_n))$ alors
$$\lim_{n\to\infty} r_n = 0.$$
- si f est stable en arrière alors il existe $L > 0$ tel que
$$\operatorname{diam} B(z, \delta/2)^{-L} < \frac{\delta}{4}, \ \forall z \in \mathcal{J}.$$
- par une construction du type télescope, pour tout $z \in \mathcal{J}$ et $k \geq 1$
$$\operatorname{diam} B(z, \delta/2)^{-kL} < \tau_\mu^k \delta.$$
- un lemme de Mañé implique la stabilité en arrière.

Lemme de Mañé

Il existe V un voisinage de $\mathcal{J}$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, $\mu \geq 1$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $z \in V$, si $\deg_{B(z,2\delta)^{-n}} \leq \mu$ alors
$$\operatorname{diam} B(z, \delta)^{-n} < \varepsilon.$$

Esquisse de la preuve du Théorème GS

Stratégie générale :

$$\mathrm{CE} \Rightarrow \mathrm{CE}_2(z_0) \Rightarrow \text{Hölder.}$$

On choisit $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ convenable et on fixe $N > 0$ grand et $(z_i)_{i=0,\dots,N}$ une orbite en arrière de z_0, arbitraires. On fixe $R > 0$ - l'echelle - et on construit un télescope autour de cette orbite.

Esquisse de la preuve du Théorème GS

Stratégie générale :

$$\mathrm{CE} \Rightarrow \mathrm{CE}_2(z_0) \Rightarrow \text{Hölder}.$$

On choisit $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ convenable et on fixe $N > 0$ grand et $(z_i)_{i=0,\dots,N}$ une orbite en arrière de z_0, arbitraires. On fixe $R > 0$ - l'echelle - et on construit un télescope autour de cette orbite.

- $\exists L > 0 \ \forall z \in \mathcal{J}$ si $\deg_{B(z,R)^{-L}} f^L = 1$ alors

$$\left|(f^L)'(z_L)\right| > 2.$$

Esquisse de la preuve du Théorème GS

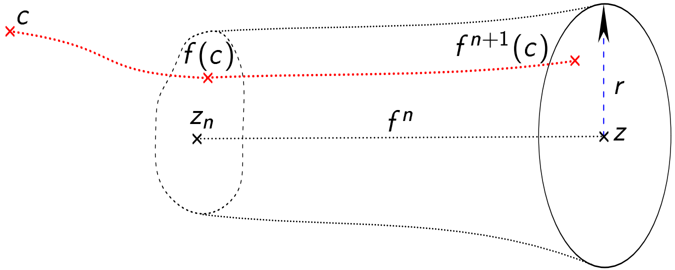
Stratégie générale :

$$\mathrm{CE} \Rightarrow \mathrm{CE}_2(z_0) \Rightarrow \text{Hölder}.$$

On choisit $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ convenable et on fixe $N > 0$ grand et $(z_i)_{i=0,\dots,N}$ une orbite en arrière de z_0, arbitraires. On fixe $R > 0$ - l'echelle - et on construit un télescope autour de cette orbite.

- $\exists L > 0\ \forall z \in \mathcal{J}$ si $\deg_{B(z,R)^{-L}} f^L = 1$ alors

$$\left|(f^L)'(z_L)\right| > 2.$$



Esquisse de la preuve du Théorème GS

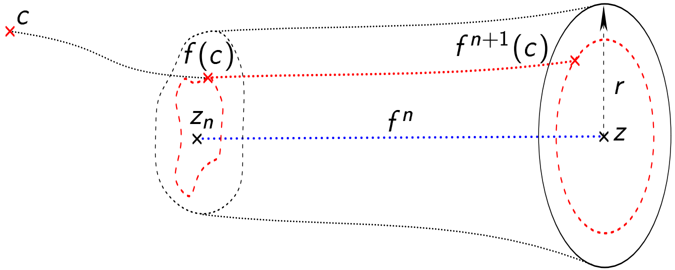
Stratégie générale :

$$\mathrm{CE} \Rightarrow \mathrm{CE}_2(z_0) \Rightarrow \text{Hölder}.$$

On choisit $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ convenable et on fixe $N > 0$ grand et $(z_i)_{i=0,\dots,N}$ une orbite en arrière de z_0, arbitraires. On fixe $R > 0$ - l'echelle - et on construit un télescope autour de cette orbite.

- $\exists L > 0 \ \forall z \in \mathcal{J}$ si $\deg_{B(z,R)^{-L}} f^L = 1$ alors

$$\left|(f^L)'(z_L)\right| > 2.$$



Esquisse de la preuve du Théorème GS

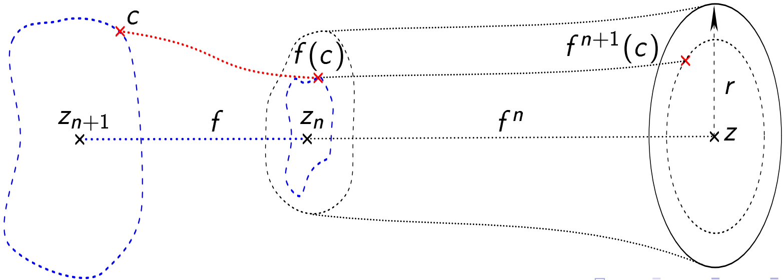
Stratégie générale :

$$\mathrm{CE} \Rightarrow \mathrm{CE}_2(z_0) \Rightarrow \text{Hölder}.$$

On choisit $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ convenable et on fixe $N > 0$ grand et $(z_i)_{i=0,\dots,N}$ une orbite en arrière de z_0, arbitraires. On fixe $R > 0$ - l'echelle - et on construit un télescope autour de cette orbite.

- $\exists L > 0\ \forall z \in \mathcal{J}$ si $\deg_{B(z,R)^{-L}} f^L = 1$ alors

$$\left|(f^L)'(z_L)\right| > 2.$$



Esquisse de la preuve du Théorème GS

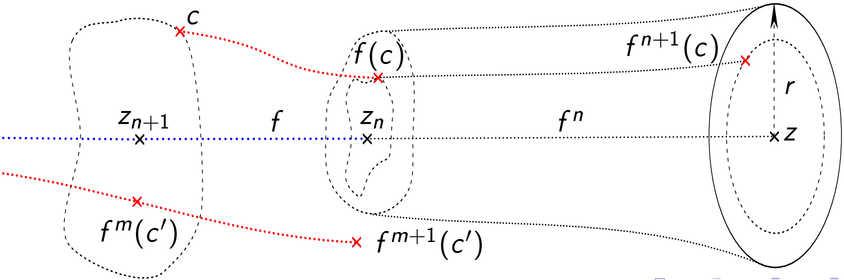
Stratégie générale :

$$\mathrm{CE} \Rightarrow \mathrm{CE}_2(z_0) \Rightarrow \text{Hölder.}$$

On choisit $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ convenable et on fixe $N > 0$ grand et $(z_i)_{i=0,\dots,N}$ une orbite en arrière de z_0, arbitraires. On fixe $R > 0$ - l'echelle - et on construit un télescope autour de cette orbite.

- $\exists L > 0\ \forall z \in \mathcal{J}$ si $\deg_{B(z,R)^{-L}} f^L = 1$ alors

$$\left|(f^L)'(z_L)\right| > 2.$$



Esquisse de la preuve du Théorème GS

Stratégie générale :

$$\mathrm{CE} \Rightarrow \mathrm{CE}_2(z_0) \Rightarrow \text{Hölder}.$$

On choisit $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ convenable et on fixe $N > 0$ grand et $(z_i)_{i=0,\ldots,N}$ une orbite en arrière de z_0, arbitraires. On fixe $R > 0$ - l'echelle - et on construit un télescope autour de cette orbite.

- $\exists L > 0\ \forall z \in \mathcal{J}$ si $\deg_{B(z,R)^{-L}} f^L = 1$ alors
$$\left|(f^L)'(z_L)\right| > 2.$$
- il existe $1 < \lambda_0 < \lambda$ tel que si $B(z,r)^{-n-1} \cap \mathrm{Crit}_{\mathcal{J}} \neq \emptyset$ et n minimal avec cette propriété alors
$$\left|(f^n)'(z_n)\right| > \lambda_0^n.$$
- si $c \in \mathrm{Crit}$ alors sur $B(c,R)$
$$f(z) \approx f(c) + C_c(z-c)^{\mu_c}.$$
- télescope avec 3 types de tubes $\Rightarrow \mathrm{CE}_2(z_0)$.

- Soit f sans cycle parabolique, $\mathrm{Crit}_{\mathcal{J}} = \mathrm{Crit} \cap \mathcal{J}$ et $\mathrm{PC}_{\mathcal{J}} = \mathrm{PC} \cap \mathcal{J}$.

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{Crit}_{\mathcal{J}} = \emptyset & & |\mathrm{PC}_{\mathcal{J}}| < \infty & & \mathrm{Crit}_{\mathcal{J}} \subseteq \mathrm{NR} & & \mathrm{Crit}_{\mathcal{J}} \subseteq \mathrm{CE} \\
\Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow \\
f \text{ Hyp.} & \Rightarrow & f \text{ Sous-hyp.} & \Rightarrow & f \text{ SH} & \overset{z^d+c}{\Rightarrow} & f \text{ CE} \\
 & & & & \Downarrow & & \text{[GS]} \Downarrow \\
 & & \Downarrow & & \mathcal{F} \text{ John} & \Rightarrow & \mathcal{F} \text{ Hölder} \\
 & & \mathcal{J} \text{ l.c.} & & & \Longleftarrow &
\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{SH} \Rightarrow \\ \mathrm{CE} \Rightarrow \end{array}\right\} \mathrm{RCE} \Rightarrow \text{Hölder} \Leftrightarrow \mathrm{CE}_2(z_0) \Leftrightarrow \mathrm{ExpShrink} \Leftrightarrow \mathrm{TCE} \ \text{[PRS]}$$

Invariance topologique.

Dynamique	Hyp., SH, TCE	CE	RCE
S-unimodale	Oui	Oui [NPSa]	-
$z^d + c$	Oui	Oui [P]	-
S-multimodale	Oui	Non (SH)	Non
rationnelle	Oui	Non (SH)	?

Esquisse de la preuve de $\mathrm{RCE} \Rightarrow$ Hölder

Stratégie générale :

$$\text{télescope} \Rightarrow \mathrm{ExpShrink}$$

Esquisse de la preuve de RCE ⇒ Hölder

Stratégie générale :

$$\text{télescope} \Rightarrow \mathrm{ExpShrink}$$

Nouveaux outils :

- contrôle de la distorsion dans le cas rationnel. Si $0 < r < R$, $W = B(z,R)^{-1}$, $W' = B(z,r)^{-1} \subseteq W$ et $\mu = \deg_W g$ alors
$$\frac{\operatorname{diam} W'}{\operatorname{diam} W} < 64 \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{\mu}}.$$

Esquisse de la preuve de RCE $\Rightarrow$ Hölder

Stratégie générale :

$$\text{télescope} \Rightarrow \mathrm{ExpShrink}$$

Nouveaux outils :

- contrôle de la distorsion dans le cas rationnel. Si $0 < r < R$, $W = B(z,R)^{-1}$, $W' = B(z,r)^{-1} \subseteq W$ et $\mu = \deg_W g$ alors
$$\frac{\operatorname{diam} W'}{\operatorname{diam} W} < 64 \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{\mu}}.$$
- contraction exponentielle du diamètre en présence des orbites CE sans borne *a priori* du degré. Il existe $\varepsilon > 0$ et $1 < \lambda_0 < \lambda$ tels que pour tout $z \in \mathcal{J}$, $W = B(z,r)^{-n-1}$ si $W \cap \mathrm{CE} \neq \emptyset$ et $\operatorname{diam} f^i(W) < \varepsilon$ pour tout $i = 1, \ldots, n$ alors
$$\operatorname{diam} f(W) < \lambda_0^{-n} r.$$

Esquisse de la preuve de $\mathrm{RCE} \Rightarrow$ Hölder

Stratégie générale :

$$\text{télescope} \Rightarrow \mathrm{ExpShrink}$$

Nouveaux outils :

- contrôle de la distorsion dans le cas rationnel. Si $0 < r < R$, $W = B(z,R)^{-1}$, $W' = B(z,r)^{-1} \subseteq W$ et $\mu = \deg_W g$ alors
$$\frac{\mathrm{diam}\, W'}{\mathrm{diam}\, W} < 64 \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{\mu}}.$$
- contraction exponentielle du diamètre en présence des orbites CE sans borne *a priori* du degré. Il existe $\varepsilon > 0$ et $1 < \lambda_0 < \lambda$ tels que pour tout $z \in \mathcal{J}$, $W = B(z,r)^{-n-1}$ si $W \cap \mathrm{CE} \neq \emptyset$ et $\mathrm{diam}\, f^i(W) < \varepsilon$ pour tout $i = 1, \dots, n$ alors
$$\mathrm{diam}\, f(W) < \lambda_0^{-n} r.$$

En utilisant aussi un argument de compacité et le lemme de Mañé on obtient la stabilité en arrière.

Construction du télescope

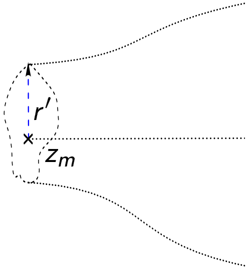
Soit $\mu = \prod_{c \in \mathrm{NR}} \mu_c$. Si $\deg_W f^n > \mu$ alors il existe $0 \leq k < n$ tel que

$$f^k(W) \cap \mathrm{CE} \neq \emptyset.$$

Construction du télescope

Soit $\mu = \prod_{c \in \mathrm{NR}} \mu_c$. Si $\deg_W f^n > \mu$ alors il existe $0 \leq k < n$ tel que

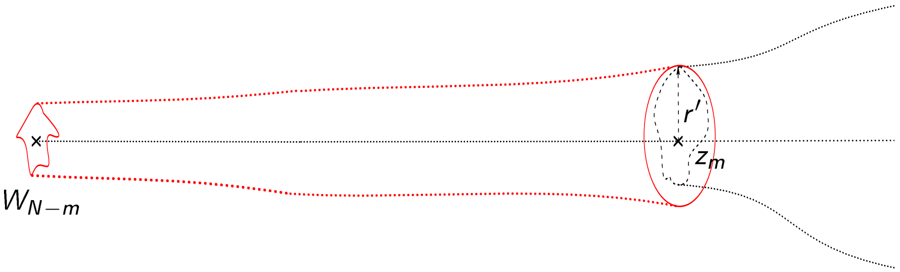
$$f^k(W) \cap \mathrm{CE} \neq \emptyset.$$



Construction du télescope

Soit $\mu = \prod_{c \in \mathrm{NR}} \mu_c$. Si $\deg_W f^n > \mu$ alors il existe $0 \leq k < n$ tel que

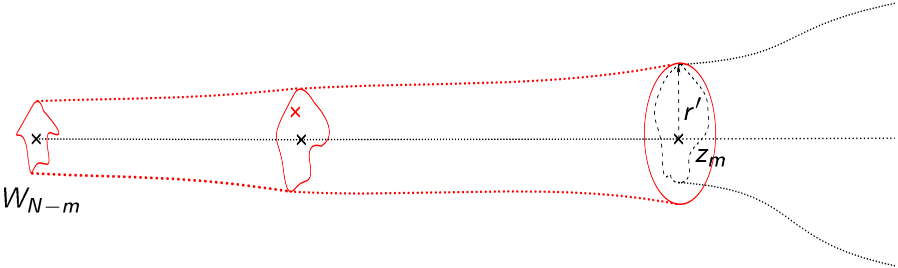
$$f^k(W) \cap \mathrm{CE} \neq \emptyset.$$



Construction du télescope

Soit $\mu = \prod_{c \in \mathrm{NR}} \mu_c$. Si $\deg_W f^n > \mu$ alors il existe $0 \leq k < n$ tel que

$$f^k(W) \cap \mathrm{CE} \neq \emptyset.$$

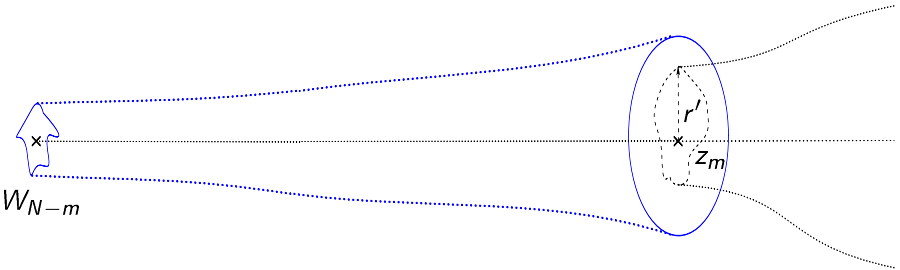


- type 1 - $\deg_{W_{N-m}} f^{N-m} > \mu$ et $r = r'$

Construction du télescope

Soit $\mu = \prod_{c \in \mathrm{NR}} \mu_c$. Si $\deg_W f^n > \mu$ alors il existe $0 \leq k < n$ tel que

$$f^k(W) \cap \mathrm{CE} \neq \emptyset.$$

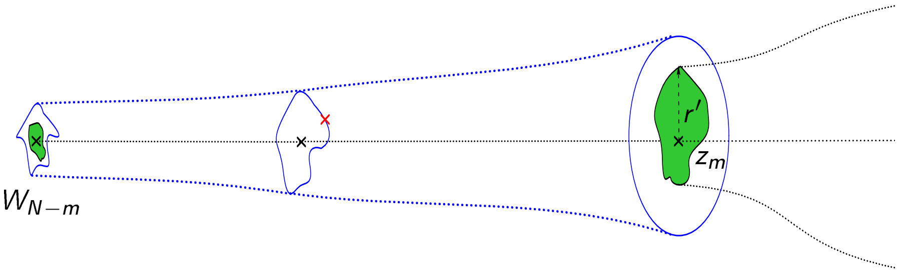


- type 1 - $\deg_{W_{N-m}} f^{N-m} > \mu$ et $r = r'$

Construction du télescope

Soit $\mu = \prod_{c \in \mathrm{NR}} \mu_c$. Si $\deg_W f^n > \mu$ alors il existe $0 \leq k < n$ tel que

$$f^k(W) \cap \mathrm{CE} \neq \emptyset.$$

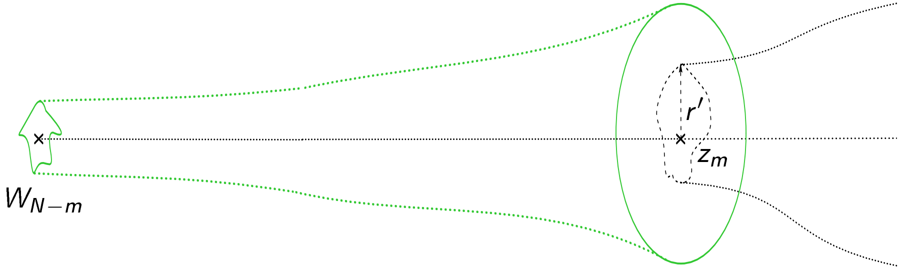


- type 1 - $\deg_{W_{N-m}} f^{N-m} > \mu$ et $r = r'$
- type 2 - $\deg_{W_{N-m}} f^{N-m} \leq \mu$ et $\deg_{\overline{W_{N-m}}} f^{N-m} > \mu$

Construction du télescope

Soit $\mu = \prod_{c \in \mathrm{NR}} \mu_c$. Si $\deg_W f^n > \mu$ alors il existe $0 \leq k < n$ tel que

$$f^k(W) \cap \mathrm{CE} \neq \emptyset.$$

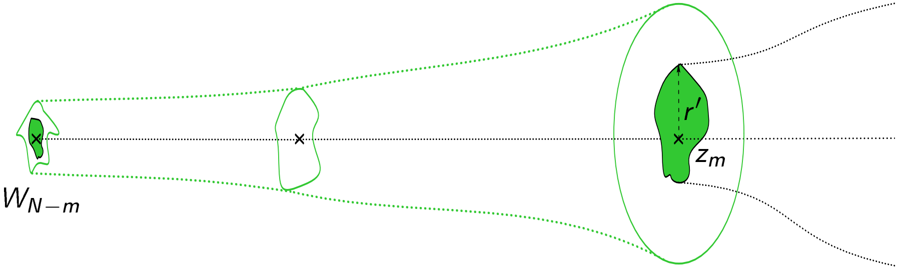


- type 1 - $\deg_{W_{N-m}} f^{N-m} > \mu$ et $r = r'$
- type 2 - $\deg_{W_{N-m}} f^{N-m} \leq \mu$ et $\deg_{\overline{W_{N-m}}} f^{N-m} > \mu$

Construction du télescope

Soit $\mu = \prod_{c \in \mathrm{NR}} \mu_c$. Si $\deg_W f^n > \mu$ alors il existe $0 \leq k < n$ tel que

$$f^k(W) \cap \mathrm{CE} \neq \emptyset.$$



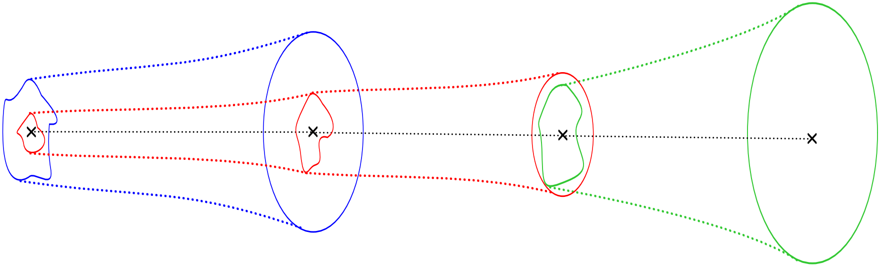
- type 1 - $\deg_{W_{N-m}} f^{N-m} > \mu$ et $r = r'$
- type 2 - $\deg_{W_{N-m}} f^{N-m} \leq \mu$ et $\deg_{\overline{W_{N-m}}} f^{N-m} > \mu$
- type 3 - $\deg_{W_{N-m}} f^{N-m} \leq \mu$ et $r = R$

Construction du télescope

Soit $\mu = \prod_{c \in \mathrm{NR}} \mu_c$. Si $\deg_W f^n > \mu$ alors il existe $0 \leq k < n$ tel que

$$f^k(W) \cap \mathrm{CE} \neq \emptyset.$$

- type 1 - $\deg_{W_{N-m}} f^{N-m} > \mu$ et $r = r'$
- type 2 - $\deg_{W_{N-m}} f^{N-m} \leq \mu$ et $\deg_{\overline{W_{N-m}}} f^{N-m} > \mu$
- type 3 - $\deg_{W_{N-m}} f^{N-m} \leq \mu$ et $r = R$



- Soit f sans cycle parabolique, $\mathrm{Crit}_{\mathcal{J}} = \mathrm{Crit} \cap \mathcal{J}$ et $\mathrm{PC}_{\mathcal{J}} = \mathrm{PC} \cap \mathcal{J}$.

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{Crit}_{\mathcal{J}} = \emptyset & & |\mathrm{PC}_{\mathcal{J}}| < \infty & & \mathrm{Crit}_{\mathcal{J}} \subseteq \mathrm{NR} & & \mathrm{Crit}_{\mathcal{J}} \subseteq \mathrm{CE} \\
\Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow \\
f \text{ Hyp.} & \Rightarrow & f \text{ Sous-hyp.} & \Rightarrow & f \text{ SH} & \overset{z^d+c}{\Rightarrow} & f \text{ CE} \\
 & & & & \Downarrow & & [\mathrm{GS}] \Downarrow \\
 & & \Downarrow & & \mathcal{F} \text{ John} & \Rightarrow & \mathcal{F} \text{ Hölder} \\
 & & \mathcal{J} \text{ l.c.} & & & \Longleftarrow &
\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{SH} \Rightarrow \\ \mathrm{CE} \Rightarrow \end{array}\right\} \mathrm{RCE} \Rightarrow \text{Hölder} \Leftrightarrow \mathrm{CE}_2(z_0) \Leftrightarrow \mathrm{ExpShrink} \Leftrightarrow \mathrm{TCE} \ [\mathrm{PRS}]$$

Invariance topologique.

Dynamique	Hyp., SH, TCE	CE	RCE
S-unimodale	Oui	Oui [NPSa]	-
$z^d + c$	Oui	Oui [P]	-
S-multimodale	Oui	Non (SH)	Non
rationnelle	Oui	Non (SH)	?

Métrique quasi-hyperbolique

Soit $\Omega \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ un domaine, $d\sigma$ la métrique sphérique et $\delta(z) = \operatorname{dist}(z, \partial\Omega)$.

Métrique quasi-hyperbolique

Soit $\Omega \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ un domaine, $d\sigma$ la métrique sphérique et $\delta(z) = \mathrm{dist}(z, \partial\Omega)$.

Définition

Ω est un domaine de John s'il existe $z_0 \in \Omega$ et $\varepsilon > 0$ tels que pour tout $z_1 \in \Omega$ il existe une courbe $\gamma \subseteq \Omega$ qui connecte z_0 à z_1 telle que

$$\forall z \in \gamma, \ \delta(z) \geq \varepsilon \, \mathrm{dist}(z, z_1).$$

Métrique quasi-hyperbolique

Soit $\Omega \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ un domaine, $d\sigma$ la métrique sphérique et $\delta(z) = \mathrm{dist}(z, \partial\Omega)$.

Définition

Soit $\gamma \subseteq \Omega$ une courbe, on définit sa longueur quasi-hyperbolique par

$$l_{qh}(\gamma) = \int_\gamma \frac{|d\sigma(z)|}{\delta(z)}.$$

Métrique quasi-hyperbolique

Soit $\Omega \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ un domaine, $d\sigma$ la métrique sphérique et $\delta(z) = \mathrm{dist}(z, \partial\Omega)$.

Définition

Soit $\gamma \subseteq \Omega$ une courbe, on définit sa longueur quasi-hyperbolique par

$$l_{qh}(\gamma) = \int_\gamma \frac{|d\sigma(z)|}{\delta(z)}.$$

Lemme (Herron - '99)

Soit $z_0 \in \Omega$ et $M > 0$. Si pour tout $z_1 \in \Omega$ il existe une courbe $\gamma(z_1, z_0) \subseteq \Omega$ telle que pour tout arc $\gamma'(w_1, w_0) \subseteq \gamma$ avec $l_{qh}(\gamma') \geq M$ on a

$$\delta(w_1) \leq \frac{1}{2}\delta(w_0),$$

alors Ω est un domaine de John $(z_0, \varepsilon(M))$.

Métrique quasi-hyperbolique

Définition

Ω est un domaine de Hölder s'il existe $z_0 \in \Omega$ tel que pour $z \in \Omega$

$$\mathrm{dist}_{qh}(z, z_0) \lesssim \log \frac{1}{\delta(z)}.$$

Métrique quasi-hyperbolique

Définition

Ω est un domaine de Hölder s'il existe $z_0 \in \Omega$ tel que pour $z \in \Omega$

$$\mathrm{dist}_{qh}(z, z_0) \lesssim \log \frac{1}{\delta(z)}.$$

Définition

Ω est un domaine intégrable s'il existe $z_0 \in \Omega$ et une fonction intégrable $H : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$,

$$\int_0^\infty H(r)dr < \infty,$$

tels que pour tout $z \in \Omega$

$$\delta(z) \leq H(\mathrm{dist}_{qh}(z, z_0)).$$

Construction des courbes $\gamma(z, z_0)$

Si f est semi-hyperbolique, elle satisfait à RCE et donc à $\mathrm{ExpShrink}$.
Soit p un point fixe attractif de f et Ω la composante de $\mathcal{F}$ qui contient p.

Construction des courbes $\gamma(z, z_0)$

Si f est semi-hyperbolique, elle satisfait à RCE et donc à $\mathrm{ExpShrink}$.
Soit p un point fixe attractif de f et Ω la composante de $\mathcal{F}$ qui contient p.

On construit un domaine $p \in V \subseteq \Omega$ tel que

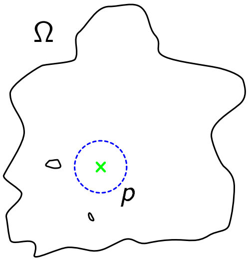
- $\overline{f(V)} \subseteq V$
- $f^{-1}(V) \cap \Omega$ a une seule composante connexe
- $\sup\{\delta(z) : z \in \partial f(V)\} < \frac{r}{4}$

Construction des courbes $\gamma(z, z_0)$

Si f est semi-hyperbolique, elle satisfait à RCE et donc à $\mathrm{ExpShrink}$.
Soit p un point fixe attractif de f et Ω la composante de $\mathcal{F}$ qui contient p.

On construit un domaine $p \in V \subseteq \Omega$ tel que

- $\overline{f(V)} \subseteq V$
- $f^{-1}(V) \cap \Omega$ a une seule composante connexe
- $\sup\{\delta(z) : z \in \partial f(V)\} < \frac{r}{4}$

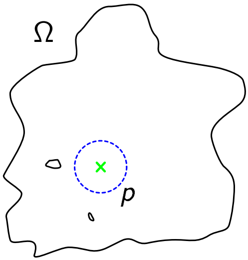


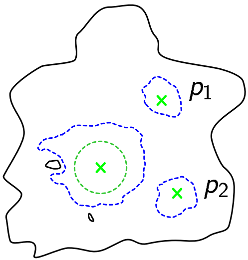
Construction des courbes $\gamma(z, z_0)$

Si f est semi-hyperbolique, elle satisfait à RCE et donc à $\mathrm{ExpShrink}$.
Soit p un point fixe attractif de f et Ω la composante de $\mathcal{F}$ qui contient p.

On construit un domaine $p \in V \subseteq \Omega$ tel que

- $\overline{f(V)} \subseteq V$
- $f^{-1}(V) \cap \Omega$ a une seule composante connexe
- $\sup\{\delta(z) : z \in \partial f(V)\} < \frac{r}{4}$



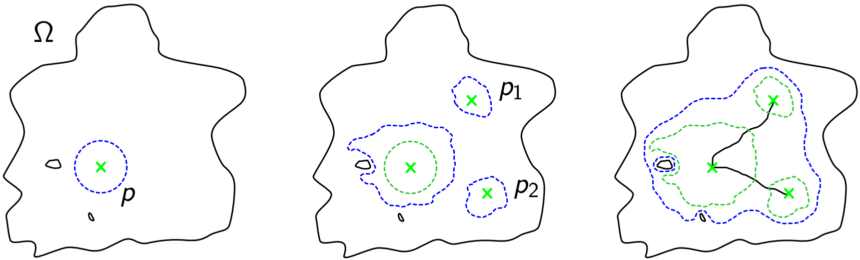


Construction des courbes $\gamma(z, z_0)$

Si f est semi-hyperbolique, elle satisfait à RCE et donc à $\mathrm{ExpShrink}$.
Soit p un point fixe attractif de f et Ω la composante de $\mathcal{F}$ qui contient p.

On construit un domaine $p \in V \subseteq \Omega$ tel que

- $\overline{f(V)} \subseteq V$
- $f^{-1}(V) \cap \Omega$ a une seule composante connexe
- $\sup\{\delta(z) : z \in \partial f(V)\} < \frac{r}{4}$



Construction des courbes $\gamma(z, z_0)$

Si f est semi-hyperbolique, elle satisfait à RCE et donc à $\mathrm{ExpShrink}$.
Soit p un point fixe attractif de f et Ω la composante de $\mathcal{F}$ qui contient p.

On construit un domaine $p \in V \subseteq \Omega$ tel que

- $\overline{f(V)} \subseteq V$
- $f^{-1}(V) \cap \Omega$ a une seule composante connexe
- $\sup\{\delta(z) : z \in \partial f(V)\} < \frac{r}{4}$

Il existe $L > 0$ telle que pour tout $z \in \overline{V}$ il existe $\gamma_z = \gamma(z, p) \subseteq \Omega$ avec

$$l_{qh}(\gamma_z) \leq L.$$

Construction des courbes $\gamma(z, z_0)$

Si f est semi-hyperbolique, elle satisfait à RCE et donc à $\mathrm{ExpShrink}$.
Soit p un point fixe attractif de f et Ω la composante de $\mathcal{F}$ qui contient p.

On construit un domaine $p \in V \subseteq \Omega$ tel que

- $\overline{f(V)} \subseteq V$
- $f^{-1}(V) \cap \Omega$ a une seule composante connexe
- $\sup\{\delta(z) : z \in \partial f(V)\} < \frac{r}{4}$

Il existe $L > 0$ telle que pour tout $z \in \overline{V}$ il existe $\gamma_z = \gamma(z, p) \subseteq \Omega$ avec

$$l_{qh}(\gamma_z) \leq L.$$

Soit $\gamma_z' = \gamma_z \backslash f(V)$. Pour tout $z \in \Omega$ on définit $\gamma_z = \gamma(z, p)$ telle que

$$\gamma_z \backslash V$$

soit une concaténation des préimages des arcs du type γ_w' avec $w \in \overline{V} \backslash f(V)$. Alors $f(\gamma_z) \backslash f(V) = \gamma_{f(z)} \backslash f(V)$.

Régularité Hölder

Soit $n(z) = \min\{k \geq 0 : f^k(z) \in V\}$ pour tout $z \in \Omega$. Comme conséquence du Lemme de Koebe, pour $z \in \Omega$

$$l_{qh}(\gamma_z) \lesssim n(z).$$

Régularité Hölder

Soit $n(z) = \min\{k \geq 0 : f^k(z) \in V\}$ pour tout $z \in \Omega$. Comme conséquence du Lemme de Koebe, pour $z \in \Omega$

$$l_{qh}(\gamma_z) \lesssim n(z).$$

Par $\mathrm{ExpShrink}$, si $z \in \Omega \backslash V$ alors

$$\delta(z) \leq \lambda^{-n(z)}.$$

Régularité Hölder

Soit $n(z) = \min\{k \geq 0 : f^k(z) \in V\}$ pour tout $z \in \Omega$. Comme conséquence du Lemme de Koebe, pour $z \in \Omega$

$$l_{qh}(\gamma_z) \lesssim n(z).$$

Par $\mathrm{ExpShrink}$, si $z \in \Omega \backslash V$ alors

$$\delta(z) \leq \lambda^{-n(z)}.$$

On a aussi

$$\delta(\partial V) \cdot ||f'||_\infty^{-n(z)} \leq \delta(z).$$

Régularité Hölder

Soit $n(z) = \min\{k \geq 0 : f^k(z) \in V\}$ pour tout $z \in \Omega$. Comme conséquence du Lemme de Koebe, pour $z \in \Omega$

$$l_{qh}(\gamma_z) \lesssim n(z).$$

Par $\mathrm{ExpShrink}$, si $z \in \Omega \backslash V$ alors

$$\delta(z) \leq \lambda^{-n(z)}.$$

On a aussi

$$\delta(\partial V) \cdot ||f'||_\infty^{-n(z)} \leq \delta(z).$$

Les deux dernières inégalités montrent que

$$-\log \delta(z) \approx n(z).$$

Régularité Hölder

Soit $n(z) = \min\{k \geq 0 : f^k(z) \in V\}$ pour tout $z \in \Omega$. Comme conséquence du Lemme de Koebe, pour $z \in \Omega$

$$l_{qh}(\gamma_z) \lesssim n(z).$$

Par $\mathrm{ExpShrink}$, si $z \in \Omega \backslash V$ alors

$$\delta(z) \leq \lambda^{-n(z)}.$$

On a aussi

$$\delta(\partial V) \cdot ||f'||_\infty^{-n(z)} \leq \delta(z).$$

Les deux dernières inégalités montrent que

$$-\log \delta(z) \approx n(z).$$

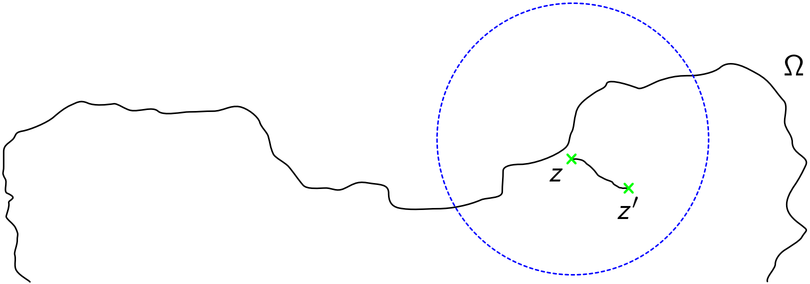
Remarque. Ω est un domaine de Hölder.

Régularité John

Pour tout $\eta > 0$ il existe $M > 0$ telle que si $z' \in \gamma_z \cap V \backslash f(V)$ et $l_{qh}(\gamma(z, z')) > M$ alors $\delta(z) < \eta\delta(z')$.

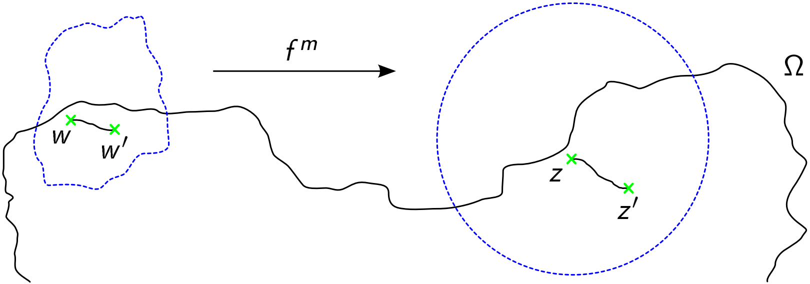
Régularité John

Pour tout $\eta > 0$ il existe $M > 0$ telle que si $z' \in \gamma_z \cap V \backslash f(V)$ et $l_{qh}(\gamma(z, z')) > M$ alors $\delta(z) < \eta\delta(z')$. Si $l(\gamma(z, z')) < \frac{r}{4}$, il existe $x \in \partial\Omega \subseteq \mathcal{J}$ tel que $\gamma(z, z') \subseteq B(x, \frac{r}{2})$.



Régularité John

Pour tout $\eta > 0$ il existe $M > 0$ telle que si $z' \in \gamma_z \cap V \backslash f(V)$ et $l_{qh}(\gamma(z,z')) > M$ alors $\delta(z) < \eta\delta(z')$. Si $l(\gamma(z,z')) < \frac{r}{4}$, il existe $x \in \partial\Omega \subseteq \mathcal{J}$ tel que $\gamma(z,z') \subseteq B(x, \frac{r}{2})$.



Soit $\gamma(w,w')$ une composante de $f^{-m}(\gamma(z,z'))$. Le degré étant borné, le contrôle de la distorsion géométrique montre que

$$\delta(w) \leq \frac{1}{2}\delta(w').$$

Régularité John uniforme

Pour la suite, on suppose $\mathcal{J}$ connexe. Alors les composantes de $\mathcal{F}$ sont simplement connexes. Soit U une telle composante, f est univalente sur U si et seulement si $U \cap \mathrm{Crit} = \emptyset$.

Régularité John uniforme

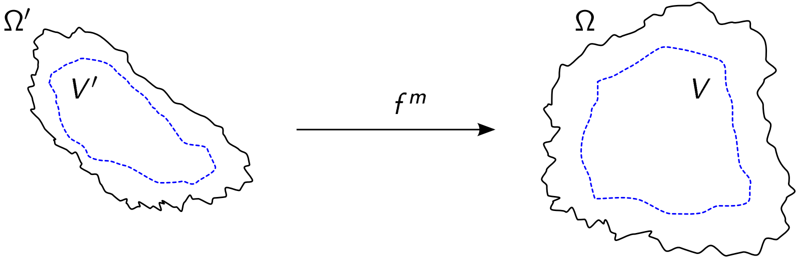
Pour la suite, on suppose $\mathcal{J}$ connexe. Alors les composantes de $\mathcal{F}$ sont simplement connexes. Soit U une telle composante, f est univalente sur U si et seulement si $U \cap \mathrm{Crit} = \emptyset$.

Soit Ω' une composante de $\mathcal{F}$ telle que $f^m(\Omega') = \Omega$ et f^m soit univalente sur Ω'. On démontre que Ω' est ε-John où ε ne dépend pas de Ω'.

Régularité John uniforme

Pour la suite, on suppose $\mathcal{J}$ connexe. Alors les composantes de $\mathcal{F}$ sont simplement connexes. Soit U une telle composante, f est univalente sur U si et seulement si $U \cap \mathrm{Crit} = \emptyset$.

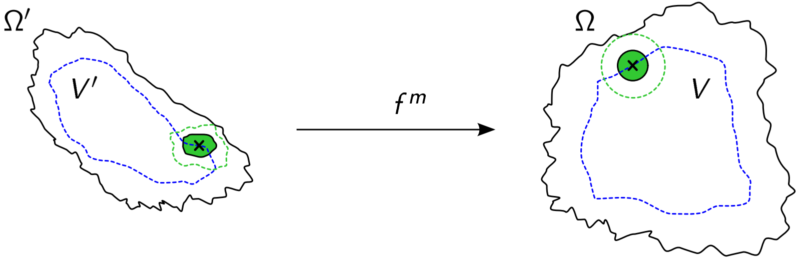
Soit Ω' une composante de $\mathcal{F}$ telle que $f^m(\Omega') = \Omega$ et f^m soit univalente sur Ω'. On démontre que Ω' est ε-John où ε ne dépend pas de Ω'.



Régularité John uniforme

Pour la suite, on suppose $\mathcal{J}$ connexe. Alors les composantes de $\mathcal{F}$ sont simplement connexes. Soit U une telle composante, f est univalente sur U si et seulement si $U \cap \mathrm{Crit} = \emptyset$.

Soit Ω' une composante de $\mathcal{F}$ telle que $f^m(\Omega') = \Omega$ et f^m soit univalente sur Ω'. On démontre que Ω' est ε-John où ε ne dépend pas de Ω'.



Régularité John uniforme

Pour la suite, on suppose $\mathcal{J}$ connexe. Alors les composantes de $\mathcal{F}$ sont simplement connexes. Soit U une telle composante, f est univalente sur U si et seulement si $U \cap \mathrm{Crit} = \emptyset$.

Soit Ω' une composante de $\mathcal{F}$ telle que $f^m(\Omega') = \Omega$ et f^m soit univalente sur Ω'. On démontre que Ω' est ε-John où ε ne dépend pas de Ω'.

Soit $V' = f^{-m}(V) \cap \Omega'$. Il suffit de voir qu'il existe $R > 0$ telle que pour tout $w, w' \in V'$

$$\frac{\delta(w)}{\delta(w')} \leq R.$$

Il s'agit d'une conséquence du Lemme de Koebe pour un recouvrement fini

$$\overline{V} \subseteq \bigcup_{1}^{k} B(x_i, r_i)$$

avec $x_i \in \overline{V}$ et $B(x_i, 2r_i) \subseteq \Omega$ pour tout $i = 1, \ldots, k$.

Domaines de John simplement connexes

Lemme (Gehring, Hag, Martio - '89)

Soit Ω un domaine ε-John simplement connexe et $a, b \in \partial\Omega$, $[a, b] \subseteq \overline{\Omega}$ et $[a, b] \cap \overline{\Omega} = \{a, b\}$. Si U_1 et U_2 sont les composantes connexes de $\Omega \backslash [a, b]$ alors

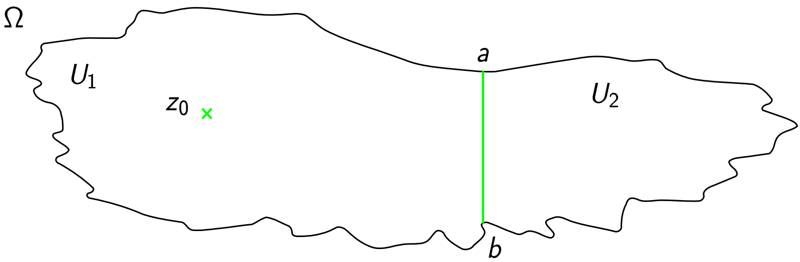
$$\min(\mathrm{diam}\ U_1, \mathrm{diam}\ U_2) \leq \varepsilon^{-1}\delta(a, b).$$

Domaines de John simplement connexes

Lemme (Gehring, Hag, Martio - '89)

Soit Ω un domaine ε-John simplement connexe et $a, b \in \partial\Omega$, $[a, b] \subseteq \overline{\Omega}$ et $[a, b] \cap \overline{\Omega} = \{a, b\}$. Si U_1 et U_2 sont les composantes connexes de $\Omega \backslash [a, b]$ alors

$$\min(\mathrm{diam}\ U_1, \mathrm{diam}\ U_2) \leq \varepsilon^{-1}\delta(a, b).$$

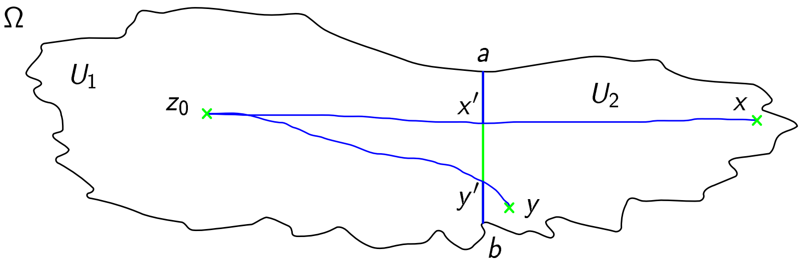


Domaines de John simplement connexes

Lemme (Gehring, Hag, Martio - '89)

Soit Ω un domaine ε-John simplement connexe et $a, b \in \partial\Omega$, $[a,b] \subseteq \overline{\Omega}$ et $[a,b] \cap \overline{\Omega} = \{a, b\}$. Si U_1 et U_2 sont les composantes connexes de $\Omega \backslash [a,b]$ alors

$$\min(\mathrm{diam}\, U_1, \mathrm{diam}\, U_2) \leq \varepsilon^{-1}\delta(a,b).$$



Soit $x, y \in U_2$, $x' = \gamma_x \cap [a,b]$ et $y' = \gamma_y \cap [a,b]$. Alors

$$\delta(x, x') \leq \varepsilon^{-1}\delta(x', a) \text{ et } \delta(y', y) \leq \varepsilon^{-1}\delta(y', b).$$

Connectivité locale de $\mathcal{J}$

Définition

Un compact connexe $K \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ est appelé localement connexe si pour tout $\tau > 0$ il existe $\theta > 0$ telle que si $a, b \in K$ avec $\delta(a, b) < \theta$ alors il existe un continuum $B \subseteq K$ tel que

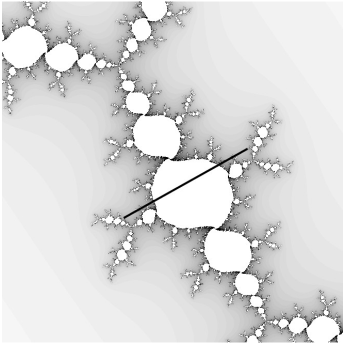
$$a, b \in B \text{ et } \operatorname{diam} B < \tau.$$

Connectivité locale de $\mathcal{J}$

Les composantes de $\mathcal{F}$ sont des domaines ε-John simplement connexes. On montre que $\mathcal{J}$ est localement connexe avec $\theta = \varepsilon^{-1}\tau$.

Connectivité locale de $\mathcal{J}$

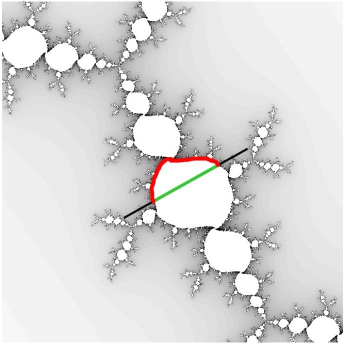
Les composantes de $\mathcal{F}$ sont des domaines ε-John simplement connexes. On montre que $\mathcal{J}$ est localement connexe avec $\theta = \varepsilon^{-1}\tau$.



Soit $a, b \in \mathcal{J}$

Connectivité locale de $\mathcal{J}$

Les composantes de $\mathcal{F}$ sont des domaines ε-John simplement connexes. On montre que $\mathcal{J}$ est localement connexe avec $\theta = \varepsilon^{-1}\tau$.



Soit $a, b \in \mathcal{J}$

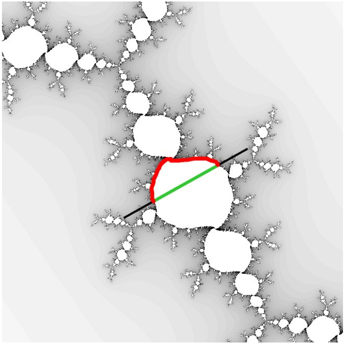
I composante de $[a, b] \cap \mathcal{F}$

$C(I)$ continuum et $\partial I \subseteq C(I)$

Pour tout intervalle ouvert $I \subseteq [a, b]$ maximal avec $I \subseteq \mathcal{J}$ ou $I \subseteq \mathcal{F}$, $C(I)$ est un continuum tel que $\partial I \subseteq C(I)$ et $\operatorname{diam} C(I) \leq \varepsilon^{-1} \operatorname{diam} I$.

Connectivité locale de $\mathcal{J}$

Les composantes de $\mathcal{F}$ sont des domaines ε-John simplement connexes. On montre que $\mathcal{J}$ est localement connexe avec $\theta = \varepsilon^{-1}\tau$.



Soit $a, b \in \mathcal{J}$

I composante de $[a, b] \cap \mathcal{F}$

$C(I)$ continuum et $\partial I \subseteq C(I)$

Pour tout intervalle ouvert $I \subseteq [a, b]$ maximal avec $I \subseteq \mathcal{J}$ ou $I \subseteq \mathcal{F}$, $C(I)$ est un continuum tel que $\partial I \subseteq C(I)$ et $\operatorname{diam} C(I) \leq \varepsilon^{-1} \operatorname{diam} I$.

On prend $B = \overline{\bigcup C(I)}$ continuum avec

$$\operatorname{diam} B \leq \varepsilon^{-1}\delta(a, b).$$

Connectivité locale de $\mathcal{J}$

Proposition

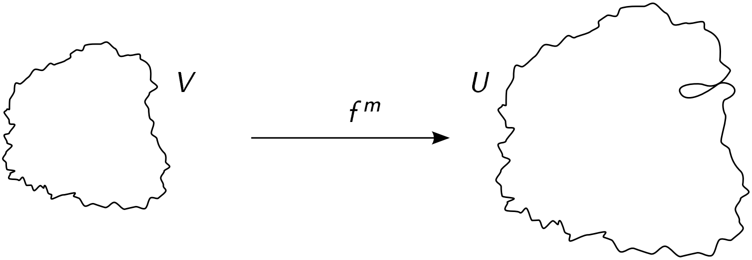
Soit $K \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ *un continuum et* $(U_n)_{n \geq 0}$ *la suite des composantes de* $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$. *Si toute* ∂U_n *est localement connexe et* $\lim_{n \to \infty} \operatorname{diam} U_n = 0$ *alors* K *est localement connexe.*

Connectivité locale de $\mathcal{J}$

Proposition

Soit $K \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ un continuum et $(U_n)_{n\geq 0}$ la suite des composantes de $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$. Si toute ∂U_n est localement connexe et $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} U_n = 0$ alors K est localement connexe.

Soit f satisfaisant à $\mathrm{ExpShrink}$ avec $\mathcal{J}$ connexe. Il suffit de voir que $\operatorname{diam} U_n \to 0$.

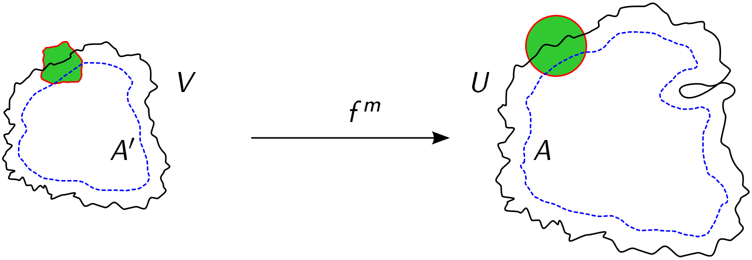


Connectivité locale de $\mathcal{J}$

Proposition

Soit $K \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ un continuum et $(U_n)_{n\geq 0}$ la suite des composantes de $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$. Si toute ∂U_n est localement connexe et $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} U_n = 0$ alors K est localement connexe.

Soit f satisfaisant à $\mathrm{ExpShrink}$ avec $\mathcal{J}$ connexe. Il suffit de voir que $\operatorname{diam} U_n \to 0$.



Connectivité locale de $\mathcal{J}$

Proposition

Soit $K \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ un continuum et $(U_n)_{n\geq 0}$ la suite des composantes de $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$. Si toute ∂U_n est localement connexe et $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} U_n = 0$ alors K est localement connexe.

Soit U une composante de de $\mathcal{F}$. On considère un anneau $A \subseteq U$ avec $\partial U \subseteq \partial A$ et $\operatorname{dist}(\overline{\mathbb{C}} \setminus A) < r$. Soit $f^m : V \to U$ univalente, V composante de $\mathcal{F}$. Si $A' = f^{-1}(A) \cap V$ alors

$$\operatorname{dist}(\overline{\mathbb{C}} \setminus A') < \lambda^{-m} \text{ et } \operatorname{mod} A' = \operatorname{mod} A.$$

Connectivité locale de $\mathcal{J}$

Proposition

Soit $K \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ un continuum et $(U_n)_{n\geq 0}$ la suite des composantes de $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$. Si toute ∂U_n est localement connexe et $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} U_n = 0$ alors K est localement connexe.

Soit U une composante de de $\mathcal{F}$. On considère un anneau $A \subseteq U$ avec $\partial U \subseteq \partial A$ et $\operatorname{dist}(\overline{\mathbb{C}} \setminus A) < r$. Soit $f^m : V \to U$ univalente, V composante de $\mathcal{F}$. Si $A' = f^{-1}(A) \cap V$ alors

$$\operatorname{dist}(\overline{\mathbb{C}} \setminus A') < \lambda^{-m} \text{ et } \operatorname{mod} A' = \operatorname{mod} A.$$

Lemme

Soit $A \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ un anneau C_1, C_2 les composantes de $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{A}$. Il existe $\alpha > 0$ qui dépend seulement de $\operatorname{mod} A$ tel que

$$\operatorname{dist}\left(\overline{\mathbb{C}} \setminus A\right) \geq \alpha \ \min(\operatorname{diam} C_1, \operatorname{diam} C_2).$$

- Soit f sans cycle parabolique, $\mathrm{Crit}_{\mathcal{J}} = \mathrm{Crit} \cap \mathcal{J}$ et $\mathrm{PC}_{\mathcal{J}} = \mathrm{PC} \cap \mathcal{J}$.

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{Crit}_{\mathcal{J}} = \emptyset & & |\mathrm{PC}_{\mathcal{J}}| < \infty & & \mathrm{Crit}_{\mathcal{J}} \subseteq \mathrm{NR} & & \mathrm{Crit}_{\mathcal{J}} \subseteq \mathrm{CE} \\
\Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow \\
f \ \mathrm{Hyp.} & \Rightarrow & f \ \mathrm{Sous\text{-}hyp.} & \Rightarrow & f \ \mathrm{SH} & \overset{z^d+c}{\Rightarrow} & f \ \mathrm{CE} \\
& & & & \Downarrow & & [\mathrm{GS}] \Downarrow \\
& & \Downarrow & & \mathcal{F} \ \text{John} & \Rightarrow & \mathcal{F} \ \text{Hölder} \\
& & \mathcal{J} \ \text{l.c.} & & & \Longleftarrow &
\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{SH} \Rightarrow \\ \mathrm{CE} \Rightarrow \end{array}\right\} \mathrm{RCE} \Rightarrow \text{Hölder} \Leftrightarrow \mathrm{CE}_2(z_0) \Leftrightarrow \mathrm{ExpShrink} \Leftrightarrow \mathrm{TCE} \ [\mathrm{PRS}]$$

Invariance topologique.

Dynamique	Hyp., SH, TCE	CE	RCE
S-unimodale	Oui	Oui [NPSa]	-
$z^d + c$	Oui	Oui [P]	-
S-multimodale	Oui	Non (SH)	Non
rationnelle	Oui	Non (SH)	?

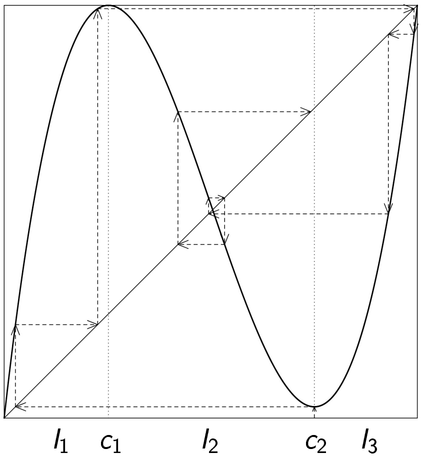
- Soit f sans cycle parabolique, $\mathrm{Crit}_{\mathcal{J}} = \mathrm{Crit} \cap \mathcal{J}$ et $\mathrm{PC}_{\mathcal{J}} = \mathrm{PC} \cap \mathcal{J}$.

$$
\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{Crit}_{\mathcal{J}} = \emptyset & & |\mathrm{PC}_{\mathcal{J}}| < \infty & & \mathrm{Crit}_{\mathcal{J}} \subseteq \mathrm{NR} & & \mathrm{Crit}_{\mathcal{J}} \subseteq \mathrm{CE} \\
\Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow \\
f \text{ Hyp.} & \Rightarrow & f \text{ Sous-hyp.} & \Rightarrow & f \text{ SH} & \overset{z^d+c}{\Rightarrow} & f \text{ CE} \\
 & & & & \Downarrow & & \text{[GS]} \Downarrow \\
 & & \Downarrow & & \mathcal{F} \text{ John} & \Rightarrow & \mathcal{F} \text{ Hölder} \\
 & & \mathcal{J} \text{ l.c.} & & & \Longleftarrow &
\end{array}
$$

$$
\left.\begin{array}{l} \mathrm{SH} \Rightarrow \\ \mathrm{CE} \Rightarrow \end{array}\right\} \mathrm{RCE} \Rightarrow \text{Hölder} \Leftrightarrow \mathrm{CE}_2(z_0) \Leftrightarrow \mathrm{ExpShrink} \Leftrightarrow \mathrm{TCE} \ \text{[PRS]}
$$

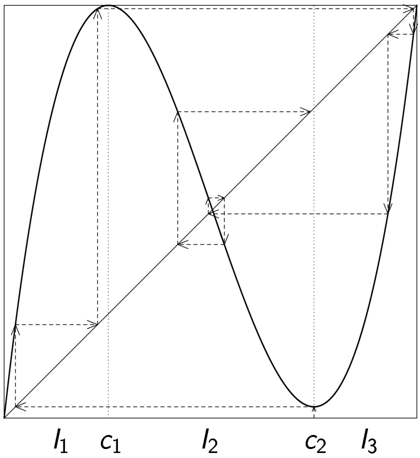
Invariance topologique.

Dynamique	Hyp., SH, TCE	CE	RCE
S-unimodale	Oui	Oui [NPSa]	-
$z^d + c$	Oui	Oui [P]	-
S-multimodale	Oui	Non (SH)	Non
rationnelle	Oui	Non (SH)	?



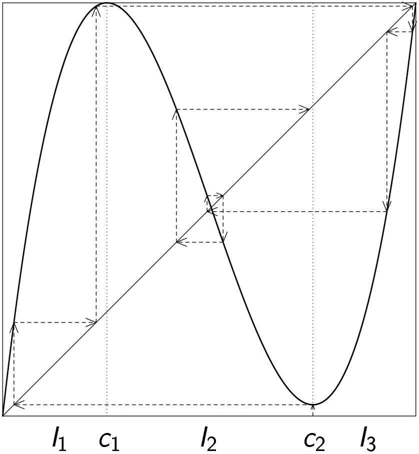
Construction

- $g \in \mathbb{R}[z]$, $\deg(g) = 3$
- $g : [0,1] \to [0,1]$, $\mathrm{Crit} = \{c_1, c_2\}$



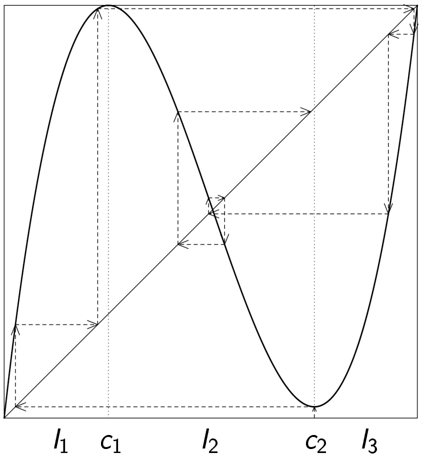
Construction

- $g \in \mathbb{R}[z]$, $\deg(g) = 3$
- $g : [0,1] \to [0,1]$, $\mathrm{Crit} = \{c_1, c_2\}$
- $g(c_1) = 1 \Rightarrow c_1 \in \mathcal{J}$
- $c_1, c_2 \in \omega(c_2) \Rightarrow c_2 \in \mathcal{J}$



Construction

- $g \in \mathbb{R}[z]$, $\deg(g) = 3$
- $g : [0,1] \to [0,1]$, $\mathrm{Crit} = \{c_1, c_2\}$
- $g(c_1) = 1 \Rightarrow c_1 \in \mathcal{J}$
- $c_1, c_2 \in \omega(c_2) \Rightarrow c_2 \in \mathcal{J}$
- $\underline{i}(x) \in \{I_1, c_1, I_2, c_2, I_3\}^{\mathbb{N}}$
- $\underline{k}_i = \underline{i}(g(c_i))$, $i = 1, 2$
- $\underline{k}_1 = I_3^{\infty}$, $\underline{k}_2 = I_1^{k_1} I_3^{k_2} I_2^{k_3} I_1 \ldots$



Construction

- $g \in \mathbb{R}[z]$, $\deg(g) = 3$
- $g : [0,1] \to [0,1]$, $\mathrm{Crit} = \{c_1, c_2\}$
- $g(c_1) = 1 \Rightarrow c_1 \in \mathcal{J}$
- $c_1, c_2 \in \omega(c_2) \Rightarrow c_2 \in \mathcal{J}$
- $\underline{i}(x) \in \{I_1, c_1, I_2, c_2, I_3\}^{\mathbb{N}}$
- $\underline{k}_i = \underline{i}(g(c_i))$, $i = 1, 2$
- $\underline{k}_1 = I_3^{\infty}$, $\underline{k}_2 = I_1^{k_1} I_3^{k_2} I_2^{k_3} I_1 \ldots$

Dans un voisinage de c_1, $|f'(x)| \approx 2C\,|x - c_1|$ et $\mathrm{diam}\, g(B(x,\delta)) \approx C\delta^2$ si $|x - c_1| \lesssim \delta$. Si $|x - c_1| \ll \delta$ alors

$$\left|f'(x)\right| \ll \frac{\mathrm{diam}\, g(B(x,\delta))}{\mathrm{diam}\, B(x,\delta)} \ll 1$$