Institutionen för Matematik, KTH
Olle Stormark

Lösningsförslag till tentamen i 5B1107 Differential- och integralkalkyl II för F1, 02–08–21.

1. Bestäm arean av den yta som fås genom att rotera kurvan

$$\begin{cases} x = 3t^2, \\ y = 2t^3, \end{cases} \qquad 0 \le t \le 1,$$

omkring y-axeln. (3p)

Lösning: $x = 3t^2 \Rightarrow \dot{x} = 6t, \quad y = 2t^3 \Rightarrow \dot{y} = 6t^2;$

$$\begin{aligned} dA &= 2\pi x\, ds = 2\pi x \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt = 2\pi \cdot 3t^2 \cdot \sqrt{36t^2 + 36t^4}\, dt \\ &= 36\pi t^2 \cdot t \cdot \sqrt{1+t^2}\, dt; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A =& 36\pi \int_0^1 t^2 \cdot \sqrt{1+t^2} \cdot t\, dt = \{u = 1 + t^2, du = 2t\, dt\} \\ &= 18\pi \int_1^3 (u-1)u^{\frac{1}{2}}\, du = 18\pi \int_1^3 \left(u^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{1}{2}}\right) du \\ &= 18\pi \left[\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_1^2 = 36\pi \left(\frac{4\sqrt{2}-1}{5} - \frac{2\sqrt{2}-1}{3}\right) \\ &= \frac{24\pi}{5}(1+\sqrt{2}). \end{aligned}$$

2. En punkt P rör sig längs skärningen mellan cylindern $z = x^2$ och planet $x + y = 2$ med den riktning i vilken y växer, så att P har den konstanta farten $v = 3$. Bestäm P:s hastighet $\boldsymbol{v}$ i $(1, 1, 1)$. (4p)

Lösning: $z = x^2, x + y = 2 \Rightarrow \boldsymbol{r} = (x, y, z) = (2 - y, y, 4 - 4y + y^2);$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = (-1, 1, -4 + 2y)\dot{y}; \\ v = |\boldsymbol{v}| &= \sqrt{1 + 1 + 16 - 16y + 4y^2}|\dot{y}| = \sqrt{18 - 16y + 4y^2} \cdot \dot{y}. \end{aligned}$$

Så $v = 3$ och $y = 1 \Rightarrow 3 = \sqrt{6}\dot{y} \Rightarrow \dot{y} = \sqrt{\frac{3}{2}}$; dvs. i punkten $(1,1,1)$ (där $y = 1$) är

$$\boldsymbol{v} = (-1, 1, -4+2)\sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}(-1, 1, -2).$$

3. Beräkna förstaderivatorna i origo av funktionen

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^3-y^3}{x^2+3y^2} & \text{då } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{då } (x,y) = (0,0). \end{cases} \qquad (3p)$$

Lösning:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h - 0}{h} = 2;$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{-\frac{1}{3}k - 0}{k} = -\frac{1}{3}.$$

4. Låt $f(u,v,w)$ vara en oändligt deriverbar funktion av de tre variablerna u, v och w. Då är

$$g(x,y) = f(y^2, xy, -x^2)$$

en oändligt deriverbar funktion av x och y. Uttryck

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}.$$

med hjälp av f:s första- och andraderivator. (4p)

Lösning: $f = f(u,v,w)$ och $u = y^2$, $v = xy$, $w = -x^2$ ger att

$$g(x,y) := f(u(x,y), v(x,y), w(x,y)) = f(y^2, xy, -x^2).$$

Härur fås att

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot y + \frac{\partial f}{\partial w} \cdot (-2x) = y\frac{\partial f}{\partial v} - 2x\frac{\partial f}{\partial w}$$

och

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(y\frac{\partial f}{\partial v} - 2x\frac{\partial f}{\partial w}\right) \\
&= \frac{\partial f}{\partial v} + y\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\cdot 2y + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot x + \frac{\partial^2 f}{\partial w \partial v}\cdot 0\right) \\
&- 2x\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial w}\cdot 2y + \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial w}\cdot x + \frac{\partial^2 f}{\partial w^2}\cdot 0\right) \\
&= \frac{\partial f}{\partial v} + 2y^2\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} - 4xy\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial w} + xy\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} - 2x^2\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial w}.
\end{aligned}
$$

5. (a) Förklara vad som menas med att funktionen $f(x, y)$ är *differentierbar* i punkten (a, b). (1p)

   (b) *Visa*:

   $$f(x, y) \text{ differentierbar i } (a, b) \Longrightarrow f(x, y) \text{ kontinuerlig i } (a, b).$$
   (1p)

   (c) Är följande påstående sant? Bevisa, eller ange ett motexempel!

   $$\frac{\partial f}{\partial x} \text{ och } \frac{\partial f}{\partial y} \text{ finns i } (a, b) \Longrightarrow f(x, y) \text{ är kontinuerlig i } (a, b).$$
   (1p)

Lösning:

(a) Kravet är att

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(a+h, b+k) - f(a, b) - h\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) - k\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

(b) Enligt (a) är

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + h\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) + \epsilon\sqrt{h^2 + k^2},$$

där $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \epsilon = 0$. Så $(h, k) \to (0, 0)$ medför att

$$f(a+h, b+k) \to f(a, b).$$

(c) Låt

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{då } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{då } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Då finns $\partial f/\partial x$ och $\partial f/\partial y$ överallt—och speciellt i origo, där de båda är lika med noll. Men $f(x,y)$ är *inte* kontinuerlig i origo.

6. Ekvationssystemet

$$\begin{cases} xy^2 + zu + v^2 = 3, \\ x^3 z + 2y - uv = 2, \\ xu + yv - xyz = 1 \end{cases} \qquad (*)$$

betyder geometriskt skärningen mellan tre hyperytor i det 5-dimensionella (x,y,z,u,v)-rummet och *bör* därmed utgöra en 2-dimensionell yta i det 5-dimensionella rummet.

Visa att man nära punkten $(1,1,1,1,1)$ kan lösa ut x, y och z som funktioner av u och v, så att ytan (*) där kan skrivas på parameterformen

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \\ z = z(u,v), \end{cases}$$

samt beräkna förstaderivatorna av $x(u,v)$, $y(u,v)$ och $z(u,v)$ då $(u,v)=(1,1)$. (4p)

Lösning: Differentiering av (*) ger

$$\begin{cases} y^2\,dx + 2xy\,dy + +z\,du + u\,dz + 2v\,dv = 0, \\ 3x^2 z\,dx + x^3\ dz + 2\,dy - v\,du - u\,dv = 0, \\ u\,dx + x\,du + y\,dv + v\,dy - yz\,dx - xz\,dy - xy\,dz = 0. \end{cases}$$

Insättning av $x = y = z = u = v = 1$ häri ger

$$\begin{cases} dx + 2dy + du + dz + 2dv = 0, \\ 3dx + 2dy + dz - du - dv = 0, \\ -dz + du + dv = 0. \end{cases}$$

Från sista ekvationen fås att $dz = du + dv$. Insättes detta i de två första ekvationerna fås

$$\begin{cases} dx + 2dy = -2du - 3dv, \\ 3dx + 2dy = 0. \end{cases}$$

Härav följer att

$$dx = du + \frac{3}{2}dv \quad \text{och} \quad dy = -\frac{3}{2}du - \frac{9}{4}dv.$$

Så i punkten (1,1,1,1,1) är

$$\begin{cases} dx = du + \frac{3}{2}dv, \\ dy = -\frac{3}{2}du - \frac{9}{4}dv, \\ dz = du + dv. \end{cases} \tag{**}$$

Implicita funktionssatsen säger nu att x, y och z nära $(1, 1, 1, 1, 1)$ *kan* lösas ut som funktioner av u och v, och vidare ger (**) att

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial u}(1,1) = 1, & \frac{\partial x}{\partial v}(1,1) = \frac{3}{2}, \\ \frac{\partial y}{\partial u}(1,1) = -\frac{3}{2}, & \frac{\partial y}{\partial v}(1,1) = -\frac{9}{4}, \\ \frac{\partial z}{\partial u}(1,1) = 1, & \frac{\partial z}{\partial v}(1,1) = 1. \end{cases}$$

7. Bestäm de största och minsta värdena som koordinatfunktionen x antar på skärningskurvan mellan planet $z = x + y$ och ellipsoiden $x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 8$. (4p)

   Lösning: Inför Lagrangefunktionen

$$L(x, y, z, \lambda, \mu) = x + \lambda(x + y - z) + \mu(x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 8)$$

och lös sedan systemet

$$0 = \frac{\partial L}{\partial x} = 1 + \lambda + 2\mu x, \tag{1}$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial y} = \lambda + 4\mu y, \tag{2}$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial z} = -\lambda + 4\mu z, \tag{3}$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x + y - z, \tag{4}$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial \mu} = x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 8. \tag{5}$$

$(2) + (3) \Rightarrow 4\mu(y+z) = 0 \Leftrightarrow \mu = 0$ och/eller $z = -y$.

$\mu = 0$ i (2) $\Rightarrow \lambda = 0$; $\mu = \lambda = 0$ i (1) $\Rightarrow 0 = 1$: FEL. Så $z = -y$. Insatt i (4) fås $x = -2y$. $x = -2y$ och $z = -y$ i (5) ger att

$$4y^2 + 2y^2 + 2y^2 = 8 \quad \Leftrightarrow \quad y^2 = 1.$$

Så $y = \pm 1$, vilket ger punkterna (-2,1,-1) och (2,-1,1).

$$\text{Slutsats:} \quad \begin{cases} x_{\max} = 2 \text{ i } (2,-1,1), \\ x_{\min} = -2 \text{ i } (-2,1,-1). \end{cases}$$

8. Låt a och c vara givna positiva tal, och låt R vara det område som ligger ovanför konen $z = c\sqrt{x^2+y^2}$ och inuti sfären $x^2+y^2+z^2 = a^2$. Beräkna integralen

$$\iiint_R (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz. \qquad \text{(3p)}$$

Lösning: Med sfäriska koordinater fås

$$\begin{aligned} &\iiint_R (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\phi=0}^{\arctan c^{-1}}\int_{r=0}^{a} r^2\cdot r^2\sin\phi\,d\theta d\phi dr \\ &= 2\pi\int_{\phi=0}^{\arctan c^{-1}}\sin\phi\,d\phi\cdot\int_{r=0}^{a} r^4\,dr = 2\pi\Big[-\cos\phi\Big]_0^{\arctan c^{-1}}\cdot\frac{a^5}{5} \\ &= \frac{2\pi a^5}{5}\big(1-\cos(\arctan c^{-1})\big) = \frac{2\pi a^5}{5}\left(1-\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}\right). \end{aligned}$$

9. Låt

$$\mathcal{D} = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon x^2+y^2+z^2 \le 4a^2 \text{ och } x^2+y^2 \ge a^2\}$$

(dvs. $\mathcal{D}$ är ett klot med ett cylindriskt hål), och låt $\mathcal{S}$ vara $\mathcal{D}$:s yta. $\mathcal{S}$ består av två delar: insidan $\mathcal{S}_i$ (= delmängd av cylinderytan $x^2+y^2 = a^2$) och utsidan $\mathcal{S}_u$ (= delmängd av sfäriska ytan $x^2+y^2+z^2 = 4a^2$). Beräkna flödet av vektorfältet

$$\boldsymbol{F} = (x+yz,\, y-xz,\, z-e^x\sin y)$$

genom

(a) hela ytan $\mathcal{S}$, (1p)

(b) insidan $\mathcal{S}_i$, (1p)

(c) utsidan $\mathcal{S}_u$. (1p)

Lösning:

(a)

$$\begin{aligned}
&\iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = \iiint_{\mathcal{D}} \operatorname{div} \boldsymbol{F}\, dxdydz \\
&= 3 \iiint_{\mathcal{D}} dxdydz = \{\text{ cylinderkoordinater}\} \\
&= 3 \int_{\theta=0}^{2\pi} \left(\int_{r=a}^{2a} \left(2 \int_{z=0}^{\sqrt{4a^2-r^2}} dz \right) r\, dr \right) d\theta \\
&= 12\pi \int_a^{2a} \sqrt{4a^2 - r^2} \cdot r\, dr = \{u = 4a^2 - r^2, du = -2r\, dr\} \\
&= -6\pi \int_{u=3a^2}^{0} u^{\frac{1}{2}}\, du = 6\pi \cdot \frac{2}{3} \Big[u^{\frac{3}{2}} \Big]_0^{3a^2} = 4\pi \cdot 3\sqrt{3} a^3 \\
&= 12\sqrt{3}\pi a^3.
\end{aligned}$$

(b) På $\mathcal{S}_i$ är $\hat{\mathbf{N}} = -\frac{1}{a}(x, y, 0)$, så

$$\boldsymbol{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} = -\frac{1}{a}(x^2 + xyz + y^2 - yxz) = -\frac{x^2 + y^2}{a} = -\frac{a^2}{a} = -a,$$

och därmed är

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{S}_i} \boldsymbol{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=-\sqrt{3}a}^{\sqrt{3}a} (-a)\, a d\theta dz = -2\pi a^2 \cdot 2\sqrt{3} a \\
&= -4\sqrt{3}\pi a^3.
\end{aligned}$$

(c) $\iint_{\mathcal{S}_u} = \iint_{\mathcal{S}} - \iint_{\mathcal{S}_i} = 12\sqrt{3}\pi a^3 + 4\sqrt{3}\pi a^3 = 16\sqrt{3}\pi a^3$.

10. Låt $\mathcal{C}$ vara skärningen mellan $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ (där a är ett givet positivt tal) och $x + y + z = 0$. Visa att

$$\oint_{\mathcal{C}} y\, dx + z\, dy + x\, dz = \pm\sqrt{3}\pi a^2,$$

där tecknet beror på $\mathcal{C}$:s orientering. (4p)

Lösning: Sökta integralen är

$$\oint_{\mathcal{C}} (y, z, x) \cdot (dx, dy, dz) = \oint_{\mathcal{C}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$$

med $\boldsymbol{F} = (y, z, x)$. Härmed fås

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y & z & x \end{vmatrix} = (-1, -1, -1).$$

Låt $\mathcal{S}$ vara den del av planet $\{x+y+z = 0\}$ som ligger innanför kurvan $\mathcal{C}$. Dess enhetsnormaler är

$$\hat{\boldsymbol{N}} = \pm \frac{(1, 1, 1)}{\sqrt{3}},$$

varför Stokes säger att

$$\begin{aligned}\oint_{\mathcal{C}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} &= \iint_{\mathcal{S}} \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot \hat{\boldsymbol{N}} \, dS \\ &= \pm \iint_{\mathcal{S}} (-1, -1, -1) \cdot \frac{(1, 1, 1)}{\sqrt{3}} \, dS = \pm\sqrt{3} \iint_{\mathcal{S}} dS = \pm\sqrt{3}\pi a^2.\end{aligned}$$