Institutionen för matematik, KTH
R. Skjelnes

Tentamensskrivning, 2002-08-21, kl 08.00–13.00.
5B1114, Kompletteringskurs i matematik.

För godkänt krävs minst 26 poäng.
Betygsgränserna för 4 och 5 är preliminärt 40 resp. 52 poäng.
Samtliga behandlade uppgifter bör förses med utförlig lösning.
Inga hjälpmedel är tillåtna. Lykke til!

---

1. **Lappskrivning 1:** Bestäm rötterna till polynomet $p(x) = (x - 1 + i)(x + 2 + 3i)$. (2p)
2. **Lappskrivning 2:** Om en matris M är diagonaliserbar, är M då nödvendigtvis inverterbar? (2p)
3. **Lappskrivning 3:** Låt $f(x, y) = x^2 \sin(xy)$, beräkna $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$. (2p)
4. Beräkna rotationen (curl) och divergensen til vektorfältet $F(x, y, z) = (x, x^2 y, z + x)$. (4p)
5. Rita dom olika typerna av nivåkurvor till funktionen $f(x, y) = x^2 - y^2$. (4p)
6. Hitta en potensial $\Phi(x, y, z)$ till vektorfältet $F(x, y, z) = (2xy, x^2, 1)$. (6p)
7. Parametrisera skärningskurvan mellan planet $z = 4x + 3y$ och cylindern $x^2 + y^2 = 4$. (6p)
8. Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^2 \int_{y/2}^1 e^{x^2}\, dxdy$ (ledning; byt om integrationsordningen) (6p)
9. Beräkna kurvintegralen $\displaystyle\oint_C \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$, där C är cirkeln rundt origo med radie $R > 0$ och med positiv orientering. (6p)
10. Beräkna volymen av den (ändeliga) kropp som bestäms av $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ och $z^2 + y^2 + x^2 = 8$. (6p)
11. Hitta max värdet av funktionen $f(x, y) = xy - x^3 y^2$, definerad på kvadratet $0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1$. (6p)
12. Beräkna flödesintegralen $\displaystyle\iint_S F \cdot N dS$, där vektorfältet $F = (xz, xye^{yz}, -xze^{yz})$ och S är den slutna yta som begränsas av halvsfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$ och xy-planet $z = 0$, och var N är enhetsnormalfältet som pekar ut från S. (8p)
13. Låt V vara ett vektorrum med bas $\{e, f\}$. Låt $T : V \to V$ vara den linjära avbildning som bestäms av
$$T(e) = 2e + f \quad och \quad T(f) = 2e.$$
a) Bestäm matrisen M_T som representerar avbildningen T med avseende på basen $\{e, f\}$. (4p)
b) Låt $E = 2e + f$ och $F = 2e$. Är $\{E, F\}$ en bas för V? (4p)

Lösningsförslag till tentamen i 5B1114, Kompletteringskurs i matematik, 2002-08-21.

1. Vi har at $p(x) = (x - (1-i))(x - (-2-3i))$. $\boxed{\textbf{Svar: } 1-i \text{ og } -2-3i.}$

---

2. Nei, om en egenverdi er null så er ikke matrisen diagonaliserbar. Et eksempel er nullmatrisen. $\boxed{\textbf{Svar: } \text{Nei.}}$

---

3. Vi har

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} x^2 \sin(xy) = \frac{\partial}{\partial x} x^3 \cos(xy) = 3x^2 \cos(xy) - x^3 y \sin(xy).$$

$\boxed{\textbf{Svar: } 3x^2\cos(xy) - x^3 y \sin(xy)\ .}$

---

4. Divergensen $\nabla \cdot F = 1 + x^2 + 1 = 2 + x^2$, mens rotasjonen er

$$\begin{bmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x & x^2 y & z+x \end{bmatrix} = (0-0, 0-1, 2xy-0).$$

$\boxed{\textbf{Svar: } \mathrm{Div}F = (2+x^2) \text{ og } \mathrm{Rot}F = (0,-1,2xy)\ .}$

---

5. $\boxed{\textbf{Svar: } \text{-.}}$

---

6. Vi integrerer første komponenten $2xy$ med hensyn på x og finner at $\Phi(x,y,z) = x^2 y + f(y,z)$, for noen funksjon $f(y,z)$ i y og z. Vi deriverer deretter med hensyn på y og sammenligner med andre komponenten til vektorfeltet F,

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^2 y + f(y,z) = x^2 + \frac{\partial f}{\partial y} = x^2,$$

hvilket gir at $f(y,z) = g(z)$ er en funksjon i z, enbart. Vi deriverer dermed $x^2 y + g(z)$ med hensyn på z som skal være lik tredje komponenten til vektorfeltet F. Dette gir at $g(z) = z + c$, for noen konstant c. Vi skal bare finne en potensial og setter $c = 0$. $\boxed{\textbf{Svar: } x^2 y + z.}$

---

7. Sylinderen kan vi parametrisere ved $(2\cos(t), 2\sin(t), z)$, der $0 \leq t \leq 2\pi$ og z kan være hva som helst. I ligningen for planet $z = 4x + 3y$ kan vi betrakte z som en funksjon av x og y, hvilket restrisert til sylinderen gir at $z = 8\cos(t) + 6\sin(t)$. $\boxed{\textbf{Svar: } r(t) = (2\cos(t), 2\sin(t), 8\cos(t) + 6\sin(t) \text{ der } 0 \leq t \leq 2\pi.}$

---

8. Man tegner opp integrasjonsområdet og bytter om integrasjonsordingen. Vi får da at det søkte integralet er

$$\int_0^1 \int_0^{2x} e^{x^2}\, dy dx = \int_0^1 2x e^{x^2}\, dx = [e^{x^2}]_0^1 = e - 1.$$

$\boxed{\textbf{Svar: } e-1.}$

---

9. Kurven parameteriserer vi ved $r(t) = (R\cos(t), R\sin(t))$ med $0 \leq t \leq 2\pi$, slik at det søkte kurveintegralet er

$$\int_0^{2\pi} \frac{-R\sin(t)R(-\sin(t)) + R\cos(t)R\cos(t)}{R^2} dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

$\boxed{\textbf{Svar: } 2\pi.}$

---

10. Skjærningen av de to flatene gis som av

$$x^2 + y^2 = 8 - x^2 - y^2,$$

hvilket gir $x^2 + y^2 = 4$. Dermed har vi at det søkte volumet gis som følgende integral (i polære koordinater)

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (\sqrt{8 - r^2} - \sqrt{r^2}) r dr d\theta = 2\pi[\frac{-1}{3}(8-r^2)^{3/2} - \frac{1}{3}r^3]_0^2 = \frac{2\pi}{3}(8^{3/2} - 16).$$

$\boxed{\textbf{Svar: } \frac{32\pi}{3}(\sqrt{2}-1).}$

---

11. Derivering gir $y(1-3x^2y) = x(1-2x^2y) = 0$. De eneste løsningene til dette er $x = y = 0$. Deretter sjekkes de forskjellige fire randkurvene. På to av randkurvene er funksjonen konstant lik null. For $y = 1$ finner vi at funksjonen blir $x - x^3$ som har kritiske punkt $x = \pm 1/\sqrt{3}$. For $x = 1$ får vi funksjonen $y - y^2$ som har kritisk punk $y = 1/2$. Inklusive hjørnene i området gir dette 7 kritiske punkt. Vi har $f(0,0) = f(1,0) = f(0,1) = f(1,1) = 0$, slik at hjørnene ikke er av interesse når det gjelder å finne maksimum. Vi har vidre at

$$f(\pm 1/\sqrt{3}, 1) = \pm\frac{2}{3\sqrt{3}} \quad f(1, 1/2) = \frac{1}{4}.$$

Det som gjenstår er å avgjøre hvilken verdi er størst. Vi har at $\sqrt{3} < 2$ slik at $3\sqrt{3} < 6 < 8$ og dermed har vi at

$$\frac{2}{3\sqrt{3}} > \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

Svar: Maksimumsverdi $\frac{2}{3\sqrt{3}}$.

---

12. Vi bruker divergenssatsen og finner at det søkte integralet er

$$\iiint_{\Omega} Div F\, dV = \iiint_{\Omega} z dV,$$

der Ω er den endelige kropp med S som rand. I sylinderkoordinater blir integralet

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-r^2}} z\, r\, dz dr d\theta = 2\pi \int_0^1 [\frac{z^2}{2}]_0^{\sqrt{1-r^2}} r dr = \pi \int_0^1 (r - r^3) dr = \frac{\pi}{4}$$

.

Svar: Integralet er $\frac{\pi}{4}$.

---

13. Vi har at matrisen som representerer avbildningen T med hensyn på det gitte basis er

$$M_T = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Da denne matrisen har determinant forskjellig fra null, så er spesielt kolumnvektorene linært uavhengige. Dermed vil E og F spenne ut hele vektorrommet V, og er følgelig en basis for V. **Svar b:** Ja.
