TENTAMENSSKRIVNING,
KOMPLETTERINGSKURS I MATEMATIK, 5B1114,
DEN 1 SEPTEMBER 2001, KLOCKAN 9.00 - 14.00

Inga hjälpmedel är tillåtna. Det är två sidor med uppgifter, och maximala poäng på varje uppgift är angivet i parantes. För betyget 3 räcker det med sammanlagt 26 poäng, för betyget 4 krävs det minst 40 poäng och för betyget 5 krävs 50 poäng. Lykke til!

Uppgift 1 = Kontrollskrivning 1 (2p). *Lös ekvationen*

$$z^2 - 3z + 1 + 3i = 2iz,$$

där i är den imaginära enheten.

Uppgift 2 = Kontrollskrivning 2 (2p). *Låt M vara den symmetriska matrisen*

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & -3 \end{bmatrix}.$$

Hitta en invertibel matris Q sådan att $Q^T = Q^{-1}$ och sådan att $Q^T M Q$ är en diagonal matris.

Uppgift 3 = Kontrollskrivning 3 (2p). *Låt $f : R^2 \to R$ vara funktionen definierad av $f(x,y) = x^2 \sin(2y) + (y/\pi)^3$. Bestäm en ekvation för tangentplanet av funktionsgrafen $z = f(x,y)$ i punkten $P = (1, \pi, 1)$.*

Uppgift 4 (4p). *Låt $R = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 2\}$, cirkelskivan omkring origo med radie $\sqrt{2}$. Låt C vara randkurvan till R, med positiv orientering. Använd Greens Theorem för att beräkna linjeintegralen*

$$\oint_C (x^2 y + x)\, dx + (y^3 \sin y - y^2 x) dy.$$

Uppgift 5 (4p). *Hitta en bas för nollrummet till matrisen*

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix},$$

dvs., hitta en bas för vektorrummet av (3×1)-matriser X sådan att $MX = 0$.

Uppgift 6 (4p). *Låt T vara den kropp som bestäms av de två paraboloiderna $z = 2x^2 + 2y^2$ och $z = x^2 + y^2 + 2$, dvs.*

$$T = \{(x,y,z) \mid 2x^2 + 2y^2 \leq z \quad \textit{och} \quad z \leq x^2 + y^2 + 2\}.$$

Beräkna integralen

$$\iiint_T \sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy\, dz.$$

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Uppgift 7 (4p). *Låt* $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4,\ y \geq 0\}$*, en halvcirkelskiva och låt* $g : R^2 \to R$ *vara funktionen definierad av* $g(x, y) = x^2 - x + y^2$*. Bestäm maximumvärdet av* g *på halvcirkelskivan* D*.*

Uppgift 8 (4p). *Låt* $F : R^2 \to R^2$ *vara det konservativa vektorfältet bestämt av*

$$F(x, y) = (y^2 \cos(2x) + xe^{x^2}, y \sin(2x) + 3y^2).$$

Bestäm en potentialfunktion Φ *till vektorfältet* F*.*

Uppgift 9 (4p). *Låt* $\omega = e^{ax+by} \sin(cz)$*, där* x, y *och* z *är variabla och* a, b *och* c *är reella tal. Visa att om* $a^2 + b^2 = c^2$ *så är* ω *harmonisk;*

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} = 0.$$

Uppgift 10 (6p). *Ekvationen* $z = -x^2 - y^2 + 4$ *definierar en paraboloid i rummet, och vi låter* S *vara ytan*

$$S = \{(x, y, z) \mid z = -x^2 - y^2 + 4, z \geq 0\}.$$

Ytan S *har två enhetsnormalfält och vi låter* $\mathbf{N}$ *vara enhetsnormalfältet med positiv* z*-koordinat. Beräkna flödesintegralen (flux)*

$$\iint_S (3xy^2 + \sin z, -y^3 + z, x^2 + y^2) \cdot \mathbf{N}\, dS.$$

Uppgift 11 (6p). *Låt* V *vara vektorrummet av polynom* $f(x)$ *i en variabel* x*, av grad mindre eller lika med 4. Låt* $D : V \to V$ *vara derivasjonsavbildningen, dvs. den avbildning* D *som skickar et element* $f(x)$ *i* V *till dets derivata*

$$D(f(x)) = \frac{d}{dx} f(x).$$

Visa at $D : V \to V$ *är en linjär operator, och bestäm om* D *är 1-1 (ett till ett) och/eller på.*

Uppgift 12 (6p). *Låt* V *vara vektorrummet av polynom i en variabel* x*, av grad mindre eller lika med 4, och låt* $D : V \to D$ *vara derivationavbildningen definerad i Uppgift 11. Mängden* $B = \{1, x, x^2, x^3, x^4 + x^3 + x^2 + x + 1\}$ *är en bas för vektorrummet* V*, och avbildningen* D *är linjär. Hitta matrisen* A *som representerar derivationsavbildningen* $D : V \to V$ *med hänsyn på basen* B*.*

Uppgift 13 (6p). *Funktionen* $F : R^2 \to R$ *är definierad ved*

$$F(x, y) = y \sin x - y^2.$$

Hitta de kritiska punkterna till F *och bestäm deras typ.*

Uppgift 14 (6p). *Låt* $E = \{(1, 1), (2, 0)\}$*. Då är* E *en bas för* R^2*. Till varje vektor* v *i* R^2 *låter vi* $[v]_E = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$*, där* (v_1, v_2) *är koordinaterna till vektor* v *i basen* E*. Låt* $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$ *vara standard basen för* R^2*. Hitta matrisen* A *sådan att* $A[v]_B = [v]_E$*, dvs. koordinatmatrisen* $[v]_B$ *multiplicerad med matrisen* A *från vänster ger koordinatmatrisen* $[v]_E$*.*

Uppgift 15 (6p). *Visa med hjälp av integration att volymen av ett klot med radie* r *ges av formeln* $\frac{4}{3}\pi r^3$*.*