FASITFORSLAG

Om karaktergrenser. På prøven kan det oppnåes maksimalt 66 poeng, hvorav de tre første oppgavene som tilsvarer kontrollskrivningene står for 6 poeng. De restværende 12 oppgaver deles i to grupper av seks, der oppgavene 4-9 gir 4 poeng hver og 10-15 gir 6 poeng.

Karaktergrensene er beregnet som følger. Karakteren 3 fåes ved $2/5 \times 66 = 26 + 2/5$ poeng av det totale, dvs. 26 poeng. Karakteren 4 fåes ved $3/5 \times 66 = 39 + 3/5$, dvs 40 poeng. Karakteren 5 fåes ved $3/4 \times 66 = 99/2$, dvs 50 poeng.

Oppgave 1. *Direkte utregning gir at* $(z-(1+i))(z-(2+i)) = z^2 - (3+2i)z + 1 + 3i$, *og således er løsningene til oppgaven gitt som* $z = 1 + i$ *og* $z = 2 + i$.

Oppgave 2. *Vi har* $\det(X - M) = (X-1)(X+3) - 5 = X^2 + 2X - 8$, *som har røtter* $X = 2$ *og* $X = -4$. *Egenrommet for* $X = 2$ *bestemmes da av nullrommet til*

$$2 - M = \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{5} \\ -\sqrt{5} & 5 \end{bmatrix},$$

og er $c[\sqrt{5}, 1]^T$, *for alle mulige reelle tall* c. *Egenrommet for* $X = -4$ *er gitt som nullrommet til*

$$4 + M = \begin{bmatrix} 5 & \sqrt{5} \\ \sqrt{5} & 1 \end{bmatrix},$$

det vil si $d[1, -\sqrt{5}]^T$, *for reelle tall* d. *Den søkte matrisen* Q *er da*

$$Q = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 1 \\ 1 & -\sqrt{5} \end{bmatrix}.$$

Oppgave 3. *Vi har*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \sin(2y) \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 \cos(2y) + \frac{3}{\pi^3} y^2.$$

En ligning for tangentplanet til $z = f(x,y)$ *i punktet* $P = (1, \pi, 1)$ *er da*

$$z = f(1,\pi) + \frac{\partial f}{\partial x}_{|P}(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}_{|P}(y-\pi) = 1 + (2 + \frac{3}{\pi})(y - \pi).$$

Oppgave 4. *Ved Greens sats har vi*

$$\int_C (x^2 y + x)\, dx + (y^3 \sin y - y^2 x)\, dy = \iint_R (-y^2 - x^2)\, dx\, dy,$$

som i polærkoordinater blir

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} -r^2 \cdot r\, dr\, d\theta = -2\pi \frac{1}{4} [r^4]_0^{\sqrt{2}} = -2\pi.$$

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Oppgave 5. *Nullrommet til* M *er gitt ved ligningen* $x+y-2z=0$. *Dette vektorrom kan beskrives som*

$$c \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + d \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 6. *De to paraboloidene skjærer hverandre når*

$$2x^2 + 2y^2 = x^2 + y^2 + 2,$$

som vi kjenner igjen som sirkelen av radius $\sqrt{2}$. *I sylinderkoordinater blir det søkte integralet lik*

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \int_{2r^2}^{r^2+2} r \cdot r \, dz \, dr \, d\theta = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} r^2 \left[r^2 + 2 - 2r^2\right] dr$$

$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} \left[2r^2 - r^4\right] dr = 2\pi \left[\frac{2}{3}r^3 - \frac{1}{5}r^5\right]_0^{\sqrt{2}} = 2\pi \left[\frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{5}\right] = \frac{16\sqrt{2}\pi}{15}.$$

Oppgave 7. *Lokale ekstremverdier på det indre av* D *er gitt ved* $\nabla g = (2x - 1, 2y) = 0$. *Dvs.* $(\frac{1}{2}, 0)$. *Randen til* D *kan parametriseres ved følgende to kurver* $C_1 = (0, t)$, *der* $-2 \leq t \leq 2$, *og* $C_2 = (2\cos t, 2\sin t)$, *der* $0 \leq t \leq \pi$. *Funksjonen* g *restrisert til* C_1 *gir da den en-variable funksjonen* $g(0,t) = t^2$, *som har en kritisk punkt i* $t = 0$, *dvs punktet* $(0,0)$. *Funksjonen* g *restrisert til* C_2 *gir*

$$4\cos^2 t - 2\cos t + 4\sin^2 t = 4 - 2\cos t,$$

og dette gir ekstremverdi når $2\sin t = 0$, *dvs. ingen ekstremverdier på det indre av intervallet* $0 \leq t \leq \pi$. *Tar vi nå med randpunkter så har vi funnet følgende kandidater for ekstremverdier*

$$(\frac{1}{2}, 0) \quad (0,0) \quad (2,0) \quad og \quad (-2,0).$$

Innsettning av disse punkt i funksjonen g *gir*

$$g(\frac{1}{2}, 0) = -\frac{1}{4} \quad g(0,0) = 0 \quad g(2,0) = 2 \quad og \quad g(-2,0) = 6,$$

og således er $(-2, 0)$ *det punkt over hvor* g *når sitt maksimum.*

Oppgave 8. *Vi integrerer første komponent av vektorfeltet med hensyn på variabelen* x *og får at*

$$\Phi = \frac{y^2}{2}\sin(2x) + \frac{1}{2}e^{x^2} + C(y).$$

Deretter ved å identifiere $\partial\Phi/\partial y$ *med andre komponent av vektorfeltet så finner vi at*

$$y\sin(2x) + \frac{\partial C(y)}{\partial y} = y\sin(2x) + 3y^2.$$

Dette gir at $C(y) = y^3 + K$, *der* K *er en konstant. Potensialfunskjonene er dermed på formen (vi søker dog kun en)*

$$\Phi = \frac{y^2}{2}\sin(2x) + \frac{1}{2}e^{x^2} + y^3 + K.$$

Oppgave 9. *Derivering og direkte innsetting gir identiteten. Fordi vi har at*

$$\omega = e^{ax+by}\sin(cz),$$

hvorfra det foelger at

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial^2 x} = a^2\omega, \frac{\partial^2\omega}{\partial^2 y} = b^2\omega \text{ og } \frac{\partial^2\omega}{\partial^2 z} = -c^2\omega.$$

Oppgave 10. *Vi lar D være legemet som begrenses av flaten S og bunn-flaten $T = \{(x,y,0) \mid x^2+y^2=4\}$. Vi lar $\hat{N}$ være det utad rettede enhetsnormalfeltet. Vi lar F være vektorfeltet $(3xy^2+\sin x, -y^3+z, x^2+y^2)$, som er definert på D. Ved Gauss-sats får vi at*

$$\iiint_D div\ (F)dV = \iint_S F\cdot\hat{N}dS + \iint_T F\cdot\hat{N}dS.$$

Siden divergensen $div(F) = 3y^2 - 3y^2 + 0 = 0$, følger det at vi søker fluks integralet $-\iint_T F\cdot\hat{N}dS$. For flaten T vil enhetsnormalfeltet være gitt ved det konstante vektorfeltet $(0,0,-1)$, slik at det integral vi søker er

$$-\iint_T F\cdot(0,0,-1)dS = \iint_T x^2+y^2dS = \iint_T x^2+y^2\,dx\,dy.$$

Kanskje et litet argumet, eller kommentar, for den siste identiteten? Vårt integral til høyre løser vi på vanlig måte ved polærkoordinater,

$$\int_0^{2\pi}\int_0^2 r^2\cdot r\,dr\,d\theta = 2\pi[\frac{r^4}{4}]_0^2 = 8\pi.$$

Oppgave 11. *Vi har at $D(cf(x)+dg(x)) = cD(f(x))+dD(g(x))$, for funksjoner $f(x)$ og $g(x)$, og konstanter c og d, - hvilket følger av vanlige derivasjonsregler. Vi har dermed at derivasjonsavbildningen D er lineær. Siden $D(c)=0$ for alle konstanter c er D ikke 1-1. Da derivering senker graden til et polynom så kan ikke elementet x^4 treffes av noe element, og vi har at D ikke er på.*

Oppgave 12. *Den søkte matrisen*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

13. *Vi deriverer og finner at de kritiske punktene til F er bestem ved*

$$y\cos x = 0 \quad \text{og} \quad \sin x - 2y = 0.$$

Første ligning gir at $y=0$ eller $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$. Innsetter vi dette i den andre ligningen får vi $y=0$ og $x=\pi k$, eller at $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$ og at $y=1/2$, eller $x=\frac{3\pi}{2}+2\pi k$ og at

$y = -1/2$. Det er uendelig mange kritiske punkt, men de kommer i 3 grupper. For å bestemme typ eller karakter til disse punkt bruker vi kriteriet "Second derivative test". For dette behøver vi de partielle derivasjonene.

$$\frac{\delta^2 F}{\delta^2 x} = -y \sin x \quad \frac{\delta^2 F}{\delta y \delta x} = \cos x \quad \frac{\delta^2 F}{\delta^2 y} = -2.$$

Vi bruker notasjonen fra boken slik at A er verdien av F_{xx} i det diskuterte punktet P, $B = F_{xy}$ i P og $C = F_{yy}$ i P.

For de kritiske punktene $(\pi k, 0)$ får vi at

$$A = 0, B = (-1)^k \ og\ C = -2.$$

Da har vi at $B^2 = 1 > AC = 0$ og punktene er sadelpunkter. For de kritiske punktene $(\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{1}{2})$ får vi at

$$A = -\frac{1}{2}, B = 0 \ og\ C = -2,$$

som gir at $B^2 = 0 < AC = 1$, med $A < 0$ og punktene er lokale maksimum. De kritiske punktene $(\frac{3\pi}{2} + 2\pi k, \frac{-1}{2})$ gir

$$A = -\frac{1}{2}, B = 0 \ og\ C = -2,$$

så disse er også lokale maksimum.

14. . *Vi bestemmer først matrisen N slik at $N[v]_E = [v]_B$, da vil den søkte matrisen A være gitt som inversen $A = N^{-1}$. For å bestemme N må vi bestemme koordinaterne til basvektorene for E i bas B. Det er klart at*

$$(1,1) = 1b_1 + 1b_2 \quad og \quad (2,0) = 2b_1,$$

der b_1 og b_2 er standardbasen. Derav følger det at

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}.$$

15. *Vi bruker sfæriske koordinater slik at volumet av ball med radie r gis ved trippelintegralet*

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^r \int_0^\pi \rho^2 \sin\phi \, d\phi \, d\rho \, d\theta.$$

$$= 2\pi \int_0^r \rho^2 [-\cos\phi]_0^\pi \, d\rho = 4\pi [\frac{1}{3}\rho^3]_0^r = \frac{4}{3}\pi r^3.$$