Institutionen för matematik, KTH
R. Skjelnes

Tentamensskrivning, 2003-03-11, kl 14.00–19.00.
5B1309, Algebra g.k.

Betygsgränserna är 28 poäng för betyget 3, 38 poäng för betyget 4 och 47 poäng för 5.
Samtliga behandlade uppgifter bör förses med utförlig lösning.
Inga hjälpmedel är tillåtna.

---

1. Beskriv dom abelska grupperna av ordning 24. (4p)
2. Är mängden $\mathbf{Z}$ med binär operationen $*$ definierad som $a * b = 2a + 2b$ en grupp? (4p)
3. Är $x^3 + 2x^2 + x + 3$ irreducibel i $\mathbf{Z}_5[x]$? (4p)
4. Låt $I \subset R$ vara ett äkta ideal i en kommutativ ring R med 1. Antag att I är et primideal vad är då kvotringen R/I? Vad om I är et maksimalt ideal? (4p)
5. Bestäm gruppen $(\mathbf{Z}_4 \times \mathbf{Z}_6)/(2,2)$. (4p)
6. Varför är en grupp av ändelig primtals ordning nödvändigtvis en cyklisk grupp? (4p)
7. Hitta det moniska irreducibla polynomet för $\alpha = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$ över $\mathbf{Q}$. (6p)
8. Hitta lösningarna til ekvationen $35x = 28$ i $\mathbf{Z}_{42}$. (6p)
9. Hitta pariteten til permutationen (6p)

$$(5\ 2\ 4\ 9\ 1)(3\ 1\ 9\ 4)(1\ 7\ 2\ 6\ 3)$$

   i den symmetriska gruppen S_9.
10. Visa att $n(n^{12} - 1)$ är delbart med 7 för alla positiva heltal n. (6p)
11. Låt $H \leq G$ vara en delgrupp av en grupp G och antag at indexet $(G : H) = 2$. Visa at H är normal. (6p)
12. Visa att ett ändligt integritetsområde är en kropp. (6p)

Lösningsförslag till tentamen i 5B1309, Algebra g.k, 2003-03-11.

1. Fundamental satsen for abelske grupper gir at de eneste mulighetene er

$$\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_3, \quad \mathbf{Z}_4 \times \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_3 \quad \text{og} \quad \mathbf{Z}_8 \times \mathbf{Z}_3$$

---

2. Den gitte operasjone er en binær operasjon, og vi trenger bare sjekke gruppeaksiomenen, men operasjone er ikke assosiativ da vi har

$$(a * b) * c = (2a + 2b) * c = 2(2a + 2b) + 2c$$
$$a * (b * c) = a * (2b + 2c) = 2a + 2(2b + 2c),$$

slik at $(a * b) * c \neq a * (b * c)$ for alle heltall a, b og c. **Svar:** Nei

---

3. Da polynomet $f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 3$ har grad 3 kan vi avgjøre irredusibilitet ved å sjekke om polynomet har nullpunkter i Z_5, og det finnes bare fem element å verifiere. Vi har

$$f(0) = 3, \quad f(1) = 2, \quad f(2) = 1, \quad f(3) = 1 \text{ og } f(4) = 3.$$

Svar: Ja, polynomet er irredusibelt

---

4. Om I er et primideal da er R/I et integritetsområde, om idealet er ett maksimalt ideal da er kvotringen R/I en kropp.

---

5. Elementet $(2, 2)$ har ordning 6 da addisjon gir forlœpet

$$(2, 2) - (0, 4) - (2, 0) - (0, 2) - (2, 4) - (0, 0).$$

Fœlgelig har faktorgruppen $V = (\mathbf{Z}_4 \times \mathbf{Z}_6)/(2, 2))$ fire element, og er sålede den sykliske gruppen $\mathbf{Z}_4$ eller Kleins Vier gruppe $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$. Vi noterer at alle partallspar er med i delgruppen generert av $(2, 2)$. Det følger da at et vilkårlig element (m, n) i V har ordning mindre eller like med 2, da

$$(m, n) + (m, n) = (2m, 2n) \in < (2, 2) >$$

Svar: Faktorgruppen er Klein Vier gruppen

---

6. Av Langranges sats vil kardinaliteten til delgruppen $< a >$ dele kardinaliteten til gruppen G, for hvert element $a \in G$. Da kardinaliteten til G er et primtall må $< a >$ være enten $\{0\}$ eller hele gruppen. Da det finnes andre element enn identitetselementet i gruppen G så finnes det også generatorer for hele gruppen, og gruppen er syklisk.

---

7. Vi betegner $\alpha = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$ og har da at $\alpha^2 = 2 + \sqrt{2}$. Dette gir at

$$(\alpha^2 - 2)^2 = \alpha^4 - 4\alpha^2 + 4 = 2$$

og α er en rot (nollställe) til polynomet $p(x) = x^4 - 4x^2 + 2$. Ved Eisensteins kriterie er polynomet $p(x)$ irredusibelt over $\mathbf{Q}$ og vi har dermed funnet der moniske irredusible polynomet til α. **Svar:** $p(x) = x^4 - 4x^2$

---

8. Den stœrste felles divisoren $\gcd(35, 28) = 7$, og da 7 deler 42 finnes det lœsninger, og det er 7 av dem (Thm. 5.3.12). Vi lœser fœrst ligningen

$$5x = 4 \text{mod}(6)$$

som har den unike løsningen $x = 2$. Siden $42 = 7 \cdot 6$ har vi at løsningene til den opprinnelige ligningen er $2 + 6m$, $0 \leq m < 7$. **Svar:** Løsningene er 2, 8, 14, 20, 26, 32 og 38

---

9. Vi skriver permutasjonen som en produkt av transposisjoner. Antallet transposisjoner vil da gi pariteten til permutasjonen. Man sjekker at følgende produkt gir permutasjonen (Merk at både 8 og 9 er invariante)

$$(2, 5)(2, 6)(1, 3)(1, 4)(1, 7)$$

Svar: Pariteten er udda

---

10. Om n selv er delbart med 7 er det klart at produktet $n(n^{12} - 1)$ er delbart med 7. Antag nå at n ikke er delbart med syv, dvs $n \neq 0$ modulo 7. Vi har da Fermats lille sats at $n^6 = 1$ modulo 7, slik at også $n^1 2 = 1$ modulo 7 og dermed har vi også at produktet $n(n^{12} - 1) = 0$ modulo 7; dvs delbar med 7.

---

11. La $a \in G$ være et element. Vi må vise at $aH = Ha$. Da indekset $(G : H) = 2$ så finnes det bare to venstre sideklasser $aH = H$ om $a \in H$ og ellers og $H \neq aH$ om a ikke er i H. Og det finnes av samme grunn bare to høyre sideklasser. Den venstre sideklassen aH er enten H eller Ha. Om $a \in H$ er det klart at at $aH = H = Ha$. Om a ikke er i H da er $aH \neq H$ og følgelig må $aH = Ha$. Med andre ord er delgruppen H normal.

---

12. Vi behøver bare vise at hvert elment $0 \neq a$ i integritetsområdet D har en multiplikativ invers. Vi merker oss at

$$aD = \{ax \mid x \in D\} \subseteq D,$$

og faktisk har vi liket. Fordi da $a \neq 0$ og vi er i et integritetsområde gjelder kanselleringslovene slik at $ax = ay$ impliserer at $x = y$. Dette gir at $|aD| = |D|$ og vi har liket $aD = D$. Spesielt da $1 \in D$ finnes det et element $x \in D$ slik at $ax = 1$. Av kommutativiteten har vi også at $ax = xa$, og dermed har a en multiplikativ invers og D er en kropp.
