1. Ortogonal dekomposition

1.1. **Ortogonal dekomposition.** Det vi använde för att härleda formeln för avståndet mellan en punkt Q i planet och en linje L, var följande observation. Låt $n = (a, b)$ vara en (nollskild) normalvektor till linjen L, och anta nu att linjen L går genom origo. Varje vektor $X = (x, y)$ kan skrivas som en sum

$$X = tv + sn,$$

där v är en riktningsvektor till linjen L, och s och t är skalärer. Vektorerna v och n är vinkelräta, och vi säger att vi har gjort en ortogonal dekomposition av X. Längden av vektorn sn var precis avståndet.

Låt oss göra detta engång till. Vi har en ortogonal dekomposition av vektor X på formen

$$X = w + sn, \tag{1.1.1}$$

där w är någon vektor i linjen, och s är något tal. Vektorn w som är i linjen L skriver vi som

$$w = \mathrm{proj}_L(X) = X - sn \tag{1.1.2}$$

och kallas projektionen av X ned på linjen L. När vi tar inreprodukten med n får vi

$$< X, n >= 0 + s||n||^2, \tag{1.1.3}$$

vilket leder oss till avstandsformeln. Nu erkänner vi enbart att talet s bestäms av uttrycket (1.1.3). Detta betyder att

$$\mathrm{proj}_L(X) = X - s \cdot n = X - \frac{< X, n >}{||n||^2} \cdot n. \tag{1.1.4}$$

1.1.1. *NB.* Märk att vi inte har använt att L är en linje, men enbart att n är en normalvektor till L. Vi vill återkomma till detta i högre dimensioner.

Exempel 1.2. Betrakta linjen L som ges av ekvationen $3x + 4y = 0$. En normalvektor till linjen är $n = (3, 4)$. Den ortogonala projektionen av punkten $(1, 2)$ ges av uttrycket (1.1.4) som

$$\mathrm{proj}_L(1, 2) = (1, 2) - \frac{< (1, 2), (3, 4) >}{25}(3, 4) = \frac{1}{25}(-8, 6).$$

Proposition 1.3. *Låt L vara en linje i planet, som går genom origo. Avbildningen $T\colon \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ som skickar en godtycklig punkt X till $\mathrm{proj}_L(X)$ är en linjär avbildning. Om $n = (a, b)$ är en nollskild normalvektor till L då ges T av matrismultiplikation med matrisen*

$$A = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{bmatrix} b^2 & -ab \\ -ab & a^2 \end{bmatrix}.$$

Proof. Linjäriteten till avbildningen T följer av utrycket (1.1.4), och definitionen av indreprodukt. För att bestämma matrisen A beräknar vi $T(1,0)$ och $T(0,1)$. Vi har

$$T(1,0) = (1,0) - \frac{a}{a^2+b^2}(a,b) = \frac{1}{a^2+b^2}(b^2, -ab),$$

vilket ger den första *kolonnen* i A. Liknande beräkning för $T(0,1)$ ger den andra kolonnen. □

Exempel 1.4. Betrakta linjen L som ges av $3x+4y=0$. Projektionen ned på linjen L ges som matrismultiplikation med

$$A = \begin{bmatrix} \frac{16}{25} & \frac{-12}{25} \\ \frac{-12}{25} & \frac{9}{25} \end{bmatrix}.$$

Specielt har vi att punkten $(1,2)$ skickas till

$$\mathrm{proj}_L(1,2) = A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = (\frac{-8}{25}, \frac{6}{25}).$$

1.5. **Spegling.** Låt L vara en linjen genom origo. För varje punkt X har vi ortogonal dekompositionen $X = w + sn$, där n är någon nollskild normalvektor till linjen L. Speglingen i linjen L är avbildningen $T\colon \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ som skickar X till

$$T(X) = \mathrm{proj}_L(X) - sn.$$

Proposition 1.6. *Låt L vara en linje som går genom origo, och betrakta avbildningen $T\colon \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ som ges som spegling i linjen L. Avbildningen T är en linjär avbildning, och vi har att*

$$T(X) = X - 2\frac{< X, n >}{||n||^2}n.$$

Specielt har vi att avbildningen ges av matrismultiplikation med matrisen

$$A = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{bmatrix} b^2-a^2 & -2ab \\ -2ab & b^2-a^2 \end{bmatrix},$$

där $n = (a,b)$ är någon nollskild normalvektor till linjen L.

Proof. Av definitionen samt linjäriteten till projektionen, följer det att speglingen är linjär. Av definitionen av projektionen (1.1.4) har vi att

$$\mathrm{proj}_L(X) = X - sn,$$

vilket ger att $T(X) = X - 2sn$. Talet s har vi träffat på tidligare, och denna bestäms av (1.1.3) som

$$s = \frac{< X, n >}{||n||^2}.$$

Därmed har vi visat det andra påståendet i propositionen. Slutligen för att bestämma matrisen A använder vi uttrycket för $T(X)$ som vi precis har visat, på vektorerna $X = (1,0)$ och $X = (0,1)$. Detta ger de två kolonnerna i matrisen A. □

Exempel 1.7. Betrakta igen linjen L som ges av ekvationen $3x+4y = 0$. Speglingen in linjen L ges av matrisen

$$A = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} -7 & -24 \\ -24 & 7 \end{bmatrix}.$$

Punkten $(1,2)$ skickas under speglingen till punkten $(\frac{-11}{5}, \frac{2}{5})$.

2. Uppgifter

Uppgift 1. Betrakta linjen L som ges av ekvationen $2x - 5y = 0$. Bestäm matrisen som representerar speglingen i linjen L, och matrisen som representerar projektionen i linjen L.

Uppgift 2. Betrakta linjen L som ges av $2x - 5y$ och linjen N som ges av $3x + 7y = 0$. Bestäm matrisrepesentationen till avbildningen t $T\colon \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ när T är

a) avbildningen som först speglar i linjen L och sedan speglar i linjen N.
b) avbildningen som först speglar i linjen N och sedan i linjen L.
c) avbildningen som först speglar i linjen N och sedan i linjen N (uh!).
d) avbildningen som först speglar i linjen N och sedan tar projektionen ned på linjen L.
e) avbildningen som först tar projektionen ned på linjen N och sedan speglar om linjen L.
f) avbildningen som först tar projektionen ned på linjen N och sedan projektionen ned på linjen L (uhu!).

Uppgift 3. I beviset av Proposition (1.3) skrev jag "... en liknande beräkning för $T(0,1)$ ger den andra kolonnen" och i beviset av Proposition (1.6) skrev jag " använder vi uttrycket för $T(X)$ som vi precis visat, på vektorerna $X = (1,0)$ och $X(0,1)$. Detta ger de två kolonnerna i matrisen A". Gör dessa detaljer som jag utelämnade.

Uppgift 4. Vinterbubbel för de som har tid. Bestäm koordinaterna till $T(2,3)$ där T är de sex olika avbildningarna i Uppgift 2. Rita, för varje T en bild som bekräftar rimligheten i ditt svar.

Nästa tillfälle. Fortsätt att majla mig felen ni hittar, och kom ihåg att ställa frågor. Nästa föreläsning sker 23 november, rum 3733, 15.30-17.00.

Department of Mathematics, KTH, Stockholm, Sweden
E-mail address: `skjelnes@kth.se`