KTH Teknikvetenskap

Trigonometri och funktioner

Mats Boij & Roy Skjelnes

23 augusti 2008

Innehåll

1 Första veckan — Geometri med trigonometri

Till att börja med kom trigonometrin till för att hantera och lösa geometriska problem, framförallt inom astronomin. Det är i geometrin det är lättast att se de trigonometriska begreppen *sinus*, *cosinus* och *tangens*. Det handlar om att gå mellan vinklar och förhållanden mellan sidlängder i rätvinkliga trianglar. För att förstå vinkelbegreppet och de två olika enheter, *grader* och *radianer*, vi har för att mäta vinklar behöver vi också titta närmare på *cirklar*, *cirkelsektorer* och *cirkelsegment*. Från rätvinkliga trianglar går vi vidare till trianglar i allmänhet och vi kan då komma fram till tre viktiga samband, *Areasatsen*, *Cosinussatsen* och *Sinussatsen*.

1.1 Rätvinkliga trianglar

Vinklar mäter vi i grader eller helst i radianer. Ett cirkelvarv definieras att vara 360 grader eller 2π radianer. Sidorna i en triangel bestämmer på ett naturlig sätt en vinkel. Vinkeln i ett triangelhörn är det positiva tal som anger hur stor del av ett cirkelvarv dessa två sidor utgör. Till varje triangel tillordnas 3 positiva (icke ordnade) tal, ett för varje hörn.

Läskoll 1.1.1. *Visa att summan av vinklarna i en godtycklig triangel alltid blir π radianer.*

Två trianglar med samma vinklar α, β, γ kallas *likformiga*. Märk att sidorna i två likformiga trianglar inte nödvändigtvis är lika stora.

Läskoll 1.1.2. *Givet en triangel ABC vars sidor har längder a, b och c, och låt $x > 0$ vara ett positivt tal. ändra de två sidolängderna till ax och bx, och bilda den likformiga triangeln vars sidor har längder ax, bx och c'. Visa att $c' = cx$.*

Läskoll 1.1.3. *Låt ABC vara en triangel med sidor av längd a, b och c, och bilda de sex kvoterna $a/b, b/a, a/c, c/a, b/c, c/b$. Visa att varje annan triangel, likformig med ABC, ger samma sex kvoter. Kvoterna är med andra ord oberoende av representant för likformighetsklassen.*

I en triangel där en av vinklarna är *rät* kallas en *rätvinklig* triangel. I en rätvinklig triangel kallas den längsta sidan, dvs. den sidan som är mitt emot den räta vinkeln, för *hypotenusan*. De bägge andra sidorna kallas *kateterna*. Pythagoras sats ger sambandet mellan längderna till hypotenusan och längderna av kateterna.

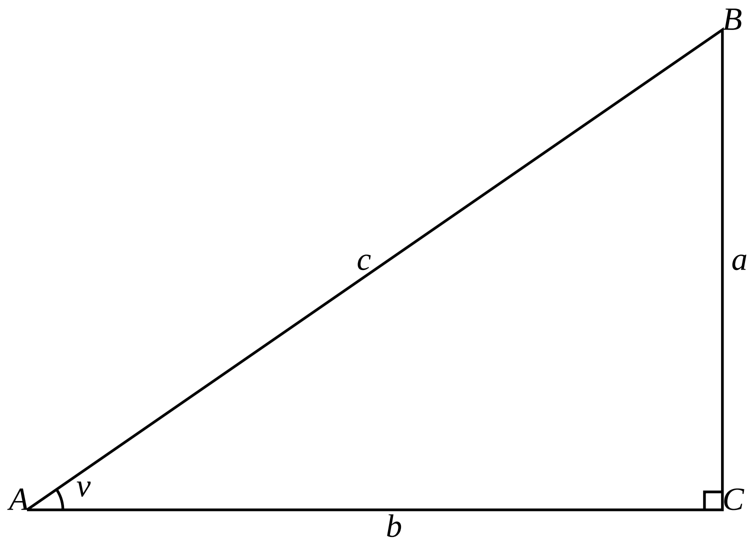
Sats 1.1 (Pythagoras sats)**.** *Betrakta en rätvinkling triangel med sidor av längd a, b och c. Om vinkeln som står mot sidan c är rät gäller att*

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Läskoll 1.1.4. *Bevisa Pythagoras sats genom att dra höjden mot sidan c och se att denna delar in c i två delar vars längder är a^2/c och b^2/c pågrund av likformighet.*

1.2 Trigonometriska funktioner I

Betrakta nu en godtycklig rätvinklig triangel som figuren nedan.



Vinkeln till hörnet A är v. Det klart att varje vinkel $0 < v < \pi/2$, mätt i radianer, ger en unik klass av likformiga rätvinkliga trianglar. Vi vet också (jfr. Läskoll 1.1.2) att varje likformig triangel, placerad som bilden ovan, ger samma kvot a/c. Detta betyder att för varje vinkel $0 < v < \pi/2$ i en rätvinklig triangel, så finns det ett unikt tal a/c. Märk att presentationen av talet a/c refererar till en tänkt triangel som ovan, och för att unvika att använda denna referens skriver vi $\sin(v)$ i stället för kvottalet a/c. Med andra ord, vad vi beskriver är en funktion

$$\sin\colon (0, \pi/2) \to \mathbb{R}$$

som skickar talet v till $\sin(v) = a/c$. Här betecknar $(0, \pi/2)$ det öppna intervallet från 0 till $\pi/2$, dvs. alla reella tal v som uppfyller $0 < v < \pi/2$. Funktionen som vi har definierad kallas *sinusfunktionen*. På liknande sätt definieras *cosinus* och *tangens* för vinkeln v av relationerna

$$\cos(v) = \frac{b}{c} \qquad \text{och} \qquad \tan(v) = \frac{a}{b}.$$

Detta ger funktioner $\cos\colon (0, \pi/2) \to \mathbb{R}$ och $\tan\colon (0, \pi/2) \to \mathbb{R}$. Vi ser på en gång att

$$\tan(v) = \frac{a}{b} = \frac{a/c}{b/c} = \frac{\sin(v)}{\cos(v)}.$$

Vi skall nästa vecka definiera dessa trigonometriska funktioner för alla reella tal, och inte enbart för det öppna intervallet $(0, \pi/2)$.

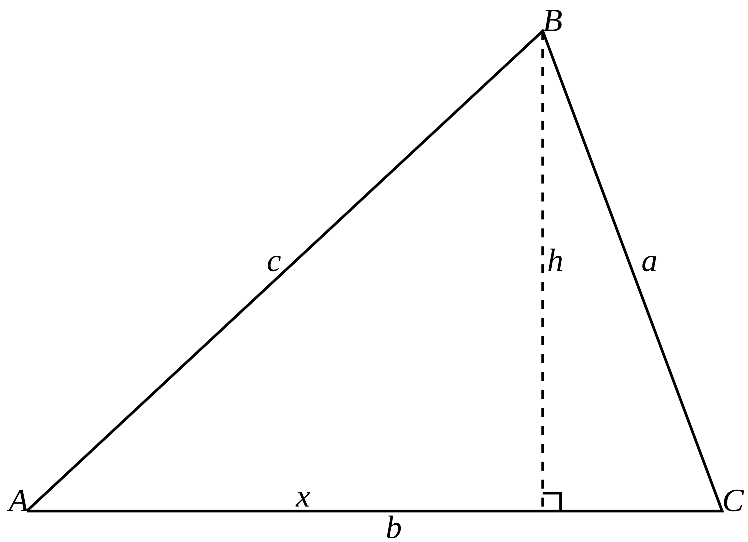
Läskoll 1.2.1. *Visa att sinus- och cosinusfunktionens värdemängd är intervallet* $(0, 1)$. *Dvs, för varje vinkel* v *kommer* $\sin(v)$ *att vara ett positiv tal mindre enn 1, och för varje positivt tal* $0 < x < 1$ *finns åtminstonde en vinkel* v *sådan att* $\sin(v) = x$.

Speciellt har vi att funktionerna $\sin$ och $\cos$ kan skrivas som

$$\sin\colon (0, \pi/2) \to (0, 1) \quad \text{och} \quad \cos\colon (0, \pi/2) \to (0, 1).$$

1.3 Triangelsatserna

Genom att rita en figur där vi drar en höjd mot en av sidorna kan vi härleda alla tre triangelsatserna. Om triangelns hörn är A, B och C, brukar vi kalla triangeln för ABC. Sidlängderna för motstående sidor brukar betecknas a, b och c och motsvarande vinklar för α, β och γ.



Läskoll 1.3.1. *Visa att arean av en triangeln ABC ges av $\frac{1}{2}bh$, där b är en sida, och h den tillhörande höjden (Betrakta också situationen när höjden inte träffar motstående sida).*

Sats 1.2 (Areasatsen)**.** *Låt $\alpha < \pi/2$ vara en vinkel i en triangel ABC, och låt b och c vara längden av de tillhöranda sidorna. Då ges arean av triangeln av*

$$\frac{1}{2} \cdot bc\sin(\alpha).$$

Läskoll 1.3.2. *Bevisa areasatsen genom att använda att arean för triangeln är $bh/2$.*

Sats 1.3 (Sinussatsen)**.** *Låt α och β vara två vinklar i en triangel ABC, båda mindre än $\pi/2$ radianer. Låt a vara längden till motstående sida till vinkeln α, och b längden till motstående sida till vinkeln β. Då gäller följande samband*

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}.$$

Läskoll 1.3.3. *Bevisa sinussatsen genom att ställa upp två olika uttryck för höjden h.*

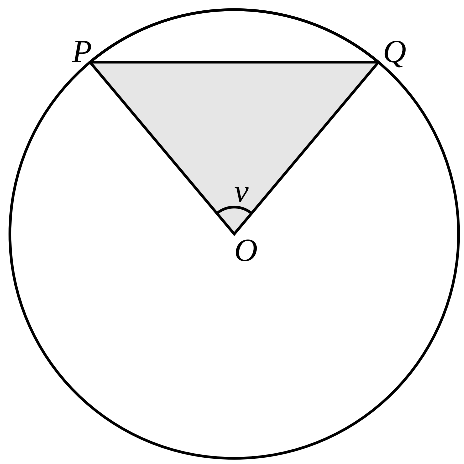
Sats 1.4 (Cosinussatsen)**.** *Låt a, b och c vara sidolängderna i en triangel ABC, och låt $\alpha < \pi/2$ vara en vinkel mindre än $\pi/2$ radianer. Om sidan a är motstående till vinkeln α, gäller följande samband*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha).$$

Läskoll 1.3.4. *Bevisa cosinussatsen: Antingen är $\beta < \pi/2$ eller $\gamma < \pi/2$. Antag att $\gamma < \pi/2$, och skriv sen om b^2 som $(b-x)^2 - x^2 - 2xb$. Med hjälp av Pythagoras sats kan sedan $(b-x)^2$ och x^2 uttryckas med hjälp av a, c och h, medan x kan uttryckas med hjälp av cosinus av α.*

1.4 Cirklar

Om vi drar två linjer från en cirkels centrum till dess periferi uppstår en *cirkelsektor* mellan dem. Cirkelsektorn är delen av cirkeln som begränsas av de två strålarna. Låt P och Q vara skärningspunkterna mellan cirkelranden och de två linjestrålarna från centrum. Drar vi dessutom en linje, eller *korda*, mellan de två punkterna P och Q, skär vi av ett *cirkelsegment*. Cirkelsegmentet är området innanför cirkelsektorn, men utanför triangeln OPQ.



Om vi låter r vara cirkelns radie, och vi mäter vinkeln v till cirkelsektoren i radianer, då ges cirkelsektorns area som

$$\frac{v}{2\pi} \cdot \pi r^2 = \frac{vr^2}{2}.$$

Sats 1.5. *Låt r vara cirkelradie, och låt en vinkel v mindre än $\pi/2$ radianer skära ut en cirkelsektor. Arean till cirkelsegmentet som bestäms av vinkeln v och radien r ges av formeln*

$$\frac{r^2}{2}(v - \sin(v)).$$

Läskoll 1.4.1. *Visa sats vid att använda att cirkelsektorns area är arean av cirkelsegmentet minus arean av triangeln OPQ.*

1.5 Rekommenderade uppgifter?

I den här kursen kommer det inte att finnas några uppgifter i kurslitteraturen som alla rekommenderas att göra. Det beror dels på att gruppen är så spridd när det gäller hur väl materialet är känt i förväg, dels på att det är tid att börja ett nytt sätt att arbeta med matematik. Meningen med uppgifterna är att man ska befästa de teoretiska kunskaperna i praktiken och kunna använda dem för att lösa problem. Problem kan ligga på mycket olika nivåer när det gäller hur direkt man kan tillämpa de teoretiska kunskaperna. Det viktiga är att varje student arbetar med uppgifter som leder till nya kunskaper och insikter hos just den individen. Rekommendationen är att titta på uppgifterna som hör till de givna avsnitten och först se på vilken nivå det är någon mening att börja. Den som redan tidigare är förtrogen med materialet har inte så stor nytta av att arbeta med uppgifter på den lägsta nivå n. Uppgifterna i kurslitteraturen är markerade med A, B och C för att markera nivå där A är den lägsta nivån. Uppgifterna från kontrollskrivningar och tentamina befinner sig alla på högre nivå än A. Inför kontrollskrivningen är det meningen att alla ska ha hunnit upp till den nivå som krävs för godkänt och många kommer också att ha hunnit längre och får då poäng för högre betyg.

Uppgifter

Övning A. 1.1. *En triangel har vinklar, mätt i radianer,* $\alpha = \pi/5$ *och* $\beta = 2\pi/7$. *Hur stor är den tredje vinkeln?*

Övning A. 1.2. *En triangelformad gräsmatta har två vinklar som mäts till* $\pi/3$ *och* $\pi/5$ *radianer. Längden mellan dessa två sidor är 7 meter. Hur stor är gräsmattans area?*

Övning A. 1.3. *Bestäm* $\sin(\pi/4)$ *och* $\cos(\pi/4)$.

Övning A. 1.4. *När du står precis 10 meter från ett träd mäter du vinkeln med marken och trädets topp att vara* $4\pi/5$ *radianer. Hur högt är trädet?*

Övning A. 1.5. *Skuggan av ett träd är 12 meter lång. En mätstock som är 75 cm lång placeras vertikalt och dess skugga mäts till 35 cm. Hur högt är trädet.*

Övning A. 1.6. *Du står ett stycke ifrån en pyramid och mäter vinkeln mellan marken och en pyramidtoppen till att vara* $\pi/6$ *radianer. Du avlägsnar dig 50 meter i riktning från pyramiden, och mäter då vinkeln* $\pi/9$ *radianer. Hur hög är pyramiden?*

Övning A. 1.7. *Vid en given tidpunkt mäts skuggan av två mätstickor. Av mätningarna får vi att vinkeln till solen är* 89.75500 *grader på det ena stället och* 89.75462 *grader vid det andra stället. Avståndet mellan mätstickorna är 1000 km. Om vi låtsas att jorden är platt, hur långt är det till solen?*

Övning A. 1.8. *Ett fjäll vid norska kusten är precis 2800 meter högt. Från fjälltoppen mäter vi vinkeln med Atlanten att vara* 88.30 *grader. Baserad på dessa mätningar, vad blir jordens radie?*

Svårare uppgifter

Uppgifterna som ges nedan ligger på en ytterligare högre nivå och är tänkta för att stimulera till att tänka vidare utanför lärobokens begränsningar. Det är inte meningen att man ska kunna lösa uppgifterna på egen hand. Det är i stället meningen att studenterna med hjälp av varandra och läraren skall kunna arbeta med problemen och på det viset lära sig något om geometri och trigonometri.

Övning C. 1. *Bestäm längden av kordan som ges av skärningen mellan enhetscirkeln och linjen* $x + y = 1/2$.

Övning C. 2. *Betrakta de punkter* (x, y) *som uppfyller olikheterna*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 & \leq & 4, \\ y & \geq & 1. \end{cases}$$

a) *Rita upp området och avgör vad det är för typ av område.*

b) *Bestäm arean av området.*

c) *Ersätt den andra olikheten med* $x + y \geq 2$ *och bestäm arean av området.*

d) *Ersätt den andra olikheten med* $y \geq c$ *och bestäm hur arean av området,* A*, beror på* c*. Skissera grafen för* $A(c)$*.*

Övning C. 3. *Betrakta området i planet som beskrivs av olikheterna*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 & \leq & 9, \\ x & \geq & 0, \\ y & \geq & x. \end{cases}$$

a) *Rita upp området och visa att det är en cirkelsektor.*

b) *Bestäm öppningsvinkeln, arean och båglängden för cirkelsektorn.*

c) *Hur varierar arean av sektorn med* c *om den sista olikheten ersätts med* $y \geq cx$*?*

Övning C. 4. *En triangel har två sidor av längd* a *och en sida av längd* b*. Uttryck sinus och cosinus för alla vinklar i triangeln med hjälp av* a *och* b*. Förenkla uttrycken så långt som möjligt. Vad händer om vi skriver* $a = m^2 + n^2$ *och* $b = 4mn$*?*

Övning C. 5. *En tetraeder är en tredimensionell kropp med fyra triangelformade sidor. I en regelbunden tetraeder är alla fyra sidor liksidiga trianglar och tyngdpunkten i tetraedern har då samma avstånd till alla fyra hörn.*

- *Hur långt är det avståndet i förhållande till kanternas längd?*
- *Om man står i tyngdpunkten och ser mot två olika hörn. Vilken är då vinkeln mellan dessa?*
- *Hur långa skall tetraedernas sidor vara för att den skall rymma en liter?*

Övning C. 6. *Longitud och latitud ger koordinater på jordytan som kan tänkas som en sfär med omkretsen 40 000 km vid ekvatorn. Hur stort är avståndet mellan Stockholm och Göteborg? Koordinaterna är* $(59,2°N, 17,6°O)$ *för Stockholm och* $(57,4°N, 12,2°O)$ *för Göteborg.*

Övning C. 7. *En triangelformad plåtbit med måtten 15 cm, 20 cm och 30 cm hålls upp mot solen som lyser klar över Stockholm. Det är mitt på dagen på midsommarafton.*

a) Hur stor kan arean av skuggan av plåtbiten på marken bli?

b) Hur stor kan den bli tre timmar senare?

(Jordaxelns lutning är c:a $23°$*.)*

Övning C. 8. *Bestäm ett uttryck för arean av en triangel med hörn i punkterna* (a_1, b_1), (a_2, b_2) *och* (a_3, b_3)*. (*Ledning: *Rita in triangeln i en rektangel med sidor parallella med koordinataxlarna.)*

1.6 Uppgifter från kontrollskrivningar och tentamina.

Övning 1.6.1. Rita upp triangeln ABC med $A = (1, 3)$, $B = (2, 4)$ och $C = (5, 1)$.

a) Bestäm cosinus för samtliga vinklar i triangeln. **(4)**

b) Avgör vilken av vinklarna som är störst. **(2)**

c) Låt C röra sig efter linjen $x = 5$ och bestäm ett villkor på C för att vinkeln B skall vara den största i triangeln. **(3)**

Övning 1.6.2. Rita upp triangeln ABC med $A = (1, 2)$, $B = (3, 5)$ och $C = (5, 1)$.

a) Bestäm sinus för samtliga vinklar i triangeln genom att använda areasatsen.(*Ledning*: För att bestämma sidlängderna och arean av triangeln kan man skriva in den i en rektangel med sidorna parallella med koordinataxlarna.) **(4)**

b) En av vinklarna är nästan precis $60°$. Vilken är det, och är den större eller mindre än $60°$? **(2)**

c) Nästa vecka kommer vi att studera subtraktionssatsen för cosinus, som säger att

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Använd denna för att härleda ett uttryck för cosinus av vinkeln mellan de två linjerna $y = kx$ och $y = \ell x$, där $k \geq 0$ och $\ell \geq 0$. **(3)**

Övning 1.6.3.

a) I en triangel ABC är sidan $c = |AB| = 5,1$ cm och sidan $a = |BC| = 6,7$ cm. Vinkeln vid A är $\alpha = 68°$. Bestäm närmevärden med två gällande siffror till den tredje sidans längd och de båda andra vinklarna med hjälp av någon av triangelsatserna. **(4)**

b) Två cirklar skär varandra i två punkter som ligger på avstånd $\sqrt{2}$ från varandra. Cirklarnas radier är 1 respektive $\sqrt{2}$. Bestäm arean av det område som ligger innanför båda cirklarna. **(5)**

Övning 1.6.4.

a) En triangel har sidlängderna 4 cm, 5 cm och 6 cm. Bestäm samtliga vinklar och arean av triangeln. **(5)**

b) Vi får en rundad triangel från en liksidig triangel genom att sätta dit cirkelbågar med centrum i ett av hörnen och som går genom de andra två hörnen. Bestäm förhållandet mellan den rundade triangelns area och den ursprungliga triangelns area? **(4)**

Övning 1.6.5.

a) Bestäm vinklarna i en triangel med sidlängderna 11 cm, 13 cm och 17 cm. **(4)**

b) Hur stor del av en cirkels yta utgörs av en regelbunden sexhörning som har sina hörn på cirkelns rand? **(3)**

c) Hur lång omkrets har en regelbunden n-hörning i förhållande till den cirkel dess hörn ligger på? **(2)**

Övning 1.6.6. I triangeln ABC har sidan AB längd 7, sidan BC längd 5 och $\cos B = 1/7$.

a) Bestäm exakta värden för längden av den tredje sidan och cosinus för de båda övriga vinklarna. **(5)**

b) Låt S vara centrum för en cirkel med som har alla triangelns hörn på periferin. Vi vet nu att vinkeln ASB är dubbelt så stor som vinkeln C enligt en känd sats. Enligt satsen för cosinus av dubbla vinkeln är $\cos 2C = 2\cos^2 C - 1$. Använd detta för att bestämma cirkelns radie. **(4)**

Övning 1.6.7. En triangulär tomt har måtten 35 m, 48 m och 50 m.

a) Beräkna närmevärden för vinklarna vid alla tre hörnen med två gällande siffror. **(4)**

b) Beräkna ett närmevärde med två gällande siffror för tomtens area. **(2)**

c) En familj som köpt den obebyggda tomten vill söka bygglov för ett hus som är format som en reguljär pentagon, dvs en femhörning där alla sidor är lika långa och alla vinklar är lika stora. Man kan räkna med att få bygglov för ett hus med bottenarea som upptar högst 10 $\%$ av tomtarean. Hur långa kan husets väggar i så fall vara? **(3)**

Övning 1.6.8. Två av sidlängderna i en triangel är 8 m och 13 m. En av vinklarna är $60°$.

a) Bestäm alla möjliga värden för den tredje sidans längd. **(4)**

b) Hur stor kan triangelns area maximalt vara? **(3)**

c) I en rätvinklig triangel delar en linje den räta vinkeln i två vinklar som är $30°$, respektive $60°$. Linjen delar hypotenusan i två längder som är 8 cm respektive 2 cm. Hur långa är kateterna i triangeln? **(2)**

Övning 1.6.9. I triangeln ABC är vinklarna $A = 42°$, $B = 63°$ och $C = 75°$.

a) Bestäm hur långa de övriga sidor är ifall den kortaste sidan har längd 15 m. Ange sidlängderna med två gällande siffors noggrannhet. **(3)**

b) Bestäm alla tre sidlängder med två gällande siffrors noggrannhet ifall arean av triangeln är 1000 m^2. **(4)**

c) Härled cosinussatsen med hjälp av Pythagoras sats genom att dra en höjd mot en av sidorna. **(2)**

Övning 1.6.10.

a) I en triangel är två av sidlängderna 7 respektive 8 längdenheter och vinkeln mellan dessa sidor är $120°$. Bestäm den tredje sidans längd och triangelns area.

(3)

b) Bestäm sidlängderna i en triangel där vinklarna är $34°$, $57°$ och $89°$ och triangelns area är 44 cm^2. Ange svaren med två värdesiffror. **(3)**

c) Två tangenter till en cirkel med radie r möts vid en vinkel av $45°$. Hur stor är arean av det område som ligger mellan tangenterna och cirkeln? **(3)**

Övning 1.6.11.

a) Om två av sidorna i en triangel är 5 meter respektive 6 meter. Vilka längder på den tredje sidans längd ger upphov till en triangel med en area på minst 9 kvadratmeter. **(5)**

b) Jämför arean av en regelbunden oktagon med sida $1/\sqrt{2}$ med en regelbunden hexagon med sida 1. Vilken är störst? **(4)**

Övning 1.6.12.

a) I en spetsvinklig[1] triangel är två av sidorna $8,6$ meter och $9,7$ meter. Arean är 32 kvadratmeter. Hur stora är vinklarna och hur lång är den tredje sidan? Ange svaren med två gällande siffrors noggrannhet. **(5)**

b) Två cirklar med samma radie r har sina medelpunkter på varandras periferi. Hur stor är arean av det område som cirklarna bildar tillsammans? Ange svaret med ett exakt värde. **(4)**

[1] alla vinklar är mindre än $90°$ ($\pi/2$ radianer)

Övning 1.6.13.

a) Bestäm vinklarna i en triangel med sidlängderna $4,2$ cm, $6,3$ cm och $7,8$ cm. Ange svaren som närmevärden i grader med två gällande siffror. **(3)**

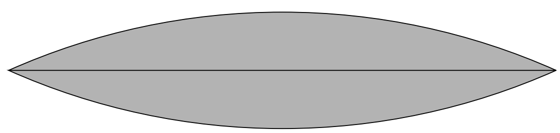
b) Bestäm arean av en triangel med sidlängderna $4,0$ cm, $5,2$ cm och $6,5$ cm. Ange svaret som närmevärde med två gällande siffror. **(2)**

c) Beräkna arean av ett cirkelsegmemt med sidan $8,4$ cm och höjden $2,3$ cm. Ange svaret som ett närmevärde med två gällande siffror. **(4)**

Övning 1.6.14.

a) I en triangel är sidan a $2,3$ cm, sidan b $4,5$ cm och vinkeln mellan sidorna b och c är $24,8°$. Bestäm de övriga vinklarna, den tredje sidans längd och triangelns area. **(5)**

b) Bestäm arean av den bladformade figuren nedan där vinklarna vid spetsarna är $48°$ och längden är $5,2$ cm. **(4)**



Övning 1.6.15.

a) Bestäm sidlängderna i en triangel med vinklarna $44°$, $63°$ och $73°$ om arean av triangeln är 64 cm^2. Ange svaren som närmevärden i grader med två gällande siffror. **(5)**

b) Härled areasatsen och sinussatsen. **(4)**

Övning 1.6.16. En triangel har hörnen A, B och C. Sidan AB är $5,2$ m, sidan BC är $6,3$ m och vinkeln vid A är $56°$.

a) Bestäm sidan AC och vinklarna vid B och C. Ange svaren som närmevärden i grader med två gällande siffror. **(4)**

b) Bestäm triangelns area med två gällande siffrors noggrannhet. **(2)**

c) Inuti triangeln ligger en cirkel med radie 75 cm som tangerar både sidan AB och sidan AC. Bestäm arean av det området som ligger mellan cirkeln och hörnet A med två gällande siffrors noggrannhet. **(3)**

Övning 1.6.17.

a) Bestäm vinklarna i en triangel med sidlängderna 22 m, 53 m och 43 m. Ange svaren som närmevärden med en decimals noggrannhet. **(3)**

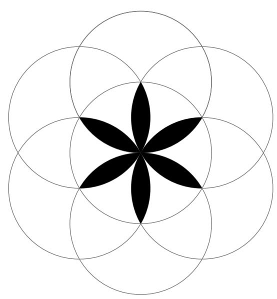
b) En fyrhörning har sidlängder $4,3$ cm, $5,3$ cm, $8,2$ cm och $5,6$ cm i denna ordning. Vinkeln mellan den förstnämnda och den sistnämnda sidan är $35°$. Bestäm fyrhörningens area. **(3)**

c) Bestäm arean av det minsta cirkelsegment som bildas då en rätvinklig triangel med sidlängder 5 cm, 12 cm, och 13 cm skrivs in i en cirkel, så att alla tre hörnen ligger på cirkelns periferi. **(3)**

Övning 1.6.18.

a) Bestäm samtliga vinklar och arean av en triangel med sidorna $21,0$ cm, $23,0$ cm och $42,0$ cm. Ange vinklarna i grader med en decimal och arean med tre värdesiffrors noggrannhet. **(5)**

b) Bestäm arean av den skuggade delen av figuren nedan som skärs ut av sex lika stora cirklar med radie 1 cm och med centrum i spetsarna av den skuggade figuren. Ange svaret på exakt form. **(4)**



Övning 1.6.19.

a) I triangeln ABC är sidan AB $7,3$ m och sidan BC $4,2$ m. Bestäm den tredje sidans längd och de två återstående vinklarna om vinkeln vid A är $34°$. Bestäm också triangelns area. Ange svaren som ett närmevärde med två gällande siffrors noggrannhet. **(6)**

b) Bestäm arean av nedanstående område där den cirkulära delens radie är $4,2$ cm och vinkeln vid områdets spets är $50°$. De räta linjerna tangerar cirkeln. Ange svaret med två gällande siffrors noggrannhet. **(3)**

Övning 1.6.20.

a) Bestäm vinklarna i en triangel med sidlängderna 43 m, 23 m och 61 m. Ange svaren som närmevärden i hela grader. **(3)**

b) I triangeln ABC är sidan AB $3,5$ cm och vinkeln vid A är $40°$. Bestäm vilka längder sidan BC kan ha för att det ska finnas två möjliga fall för längden av AC. **(3)**

c) I en cirkulär hage med radie 20 m går ett betesdjur som är tjudrat med ett rep som är 23 meter långt och som sitter fast i staketet. Hur stor del av betet kan djuret komma åt? Ange svaret avrundat till hela procent. **(3)**

Övning 1.6.21.

a) I en fyrhörning $ABCD$ är sidlängderna $|AB| = 34$ cm, $|BC| = 25$ cm, $|CD| = 32$ cm och $|AD| = 40$ cm. Vinkeln vid A är $53°$. Bestäm övriga vinklar och fyrhörningens area. **(5)**

b) Enligt sinussatsen gäller att de tre kvoterna $a/\sin\alpha$, $b/\sin\beta$ och $c/\sin\gamma$ är lika. Ge en geometrisk tolkning av denna likhet genom att se på en cirkel som passerar triangelns tre hörn. **(4)**

1.7 Facit

Övning 1.1 (5B1134:Modelltentamen:1).

a) $\cos\alpha = 1/\sqrt{10}$, $\cos\beta = 0$ och $\cos\gamma = 3/\sqrt{10}$.

b) Vinkeln vid B är störst.

c) Vinkeln vid B är störst om C ligger ovanför x-axeln.

Övning 1.2 (5B1134:KS:1:2003).

a) $\sin\alpha = \frac{14}{\sqrt{13}\sqrt{17}}$, $\sin\beta = \frac{7}{\sqrt{13}\sqrt{5}}$ och $\sin\gamma = \frac{7}{\sqrt{5}\sqrt{17}}$.

b) Vinkeln β ligger nära 60°, men är lite större än 60°.

c) Cosinus för vinkeln mellan linjerna ges av $(1+k\ell)/(\sqrt{1+k^2}\sqrt{1+\ell^2})$.

Övning 1.3 (5B1134:Tentamen:031013:1).

a) Den tredje sidan är $6,7$ cm och vinklarna är $\beta \approx 67^\circ$ och $\gamma \approx 45^\circ$.

b) Arean av området som ligger i bägge cirklarna är $7\pi/12 - (\sqrt{3}+1)/2 \approx 0,467\mathrm{cm}^2$.

Övning 1.4 (5B1134:Tentamen:031103:1).

a) Vinklarna är $\alpha = \arccos(3/4) \approx 41^\circ$, $\beta = \arccos(9/16) \approx 56^\circ$, $\gamma = \arccos(1/8) \approx 83^\circ$ och triangelns area är $15\sqrt{7}/4 \approx 9,9$ kvadratcentimeter.

b) Förhållandet mellan areorna är $2\pi/\sqrt{3} - 2 \approx 1,63$.

Övning 1.5 (5B1134:Tentamen:040109:1).

a) Vinklarna är $\alpha = \arccos(337/442) \approx 40,3^\circ$, $\beta = \arccos(241/374) \approx 49,9^\circ$ och $\gamma = \arccos(1/286) \approx 89,8^\circ$.

b) Andelen av arean är $3\sqrt{3}/2\pi \approx 0,83$.

c) Kvoten mellan omkretsarna är $(n/\pi)\sin\pi/n$.

Övning 1.6 (5B1134:Tentamen:040821:1).

a) Den tredje sidans längd är $b = 8$ och cosinus för de övriga vinklarna är $\cos A = 11/14$ och $\cos C = 1/2$.

b) Radien för cirkeln är $R = 7/\sqrt{3}$.

Övning 1.7 (5B1134:KS1:2004).

a) Vinklarna är $A \approx 42^\circ$, $B \approx 66^\circ$ och $C \approx 72^\circ$.

b) Tomtens area är 800 m^2.

c) Husets väggar kan vara högst $6,8$ m.

Alla svar är angivna med två gällande siffrors noggrannhet.

Övning 1.8 (5B1134:Tentamen:041011:1).

a) Den tredje sidan kan vara $c = 15$ m eller $c = \sqrt{129}$ m.

b) Arean av triangeln kan maximalt vara $30\sqrt{3}$ areaenheter.

c) Kateternas längder är $a = 40\sqrt{3}/7$ cm och $b = 10/7$ cm.

Övning 1.9 (5B1134:Tentamen:041030:1).

a) De övriga sidorna är 20 m respektive 22 m.

b) Sidlängderna är 39 m, 53 m och 57 m.

Övning 1.10 (5B1134:Tentamen:050112:1).

a) Den tredje sidans längd är 13 och arean är $14\sqrt{3}$.

b) Sidlängderna är 7, 7 cm, 11 cm och 14 cm.

c) Arean av området är $(1+\sqrt{2}-3\pi/8)r^2$.

Övning 1.11 (5B1134:Tentamen:050829:1).

a) Den tredje sidans längd kan variera mellan $\sqrt{13}$ och $\sqrt{109}$ för att arean skall vara minst 9 kvadratmeter.

b) Hexagonens area är $3\sqrt{3}/2 \approx 2,6$ areaenheter medan oktagonens bara är $1+\sqrt{2} \approx 2,4$ areaenheter.

Övning 1.12 (5B1134:KS1:2005).

a) Den tredje sidans längd är $7,8$ meter och vinklarna är 50°, 58° och 72°. $(0,87, 1,0$ och $1,3$ radianer.)

b) Figurens area är $(8\pi + 3\sqrt{3})r^2/6$.

Övning 1.13 (5B1134:Tentamen:051017:1).

a) Vinklarna är $\alpha \approx 32^\circ$, $\beta \approx 54^\circ$ och $\gamma \approx 94^\circ$.

b) Arean är 10 kvadratcentimeter.

c) Aran av cirkelsegmentet är 14 cm^2.

Övning 1.14 (5B1134:Tentamen:051024:1).

a) Det finns två fall. I det första är de övriga vinklarna $\beta \approx 55,1^\circ$, $\gamma \approx 100^\circ$, den tredje sidans längd $c \approx 5,4$ cm och arean $5,1$ cm^2. I det andra fallet är $\beta \approx 124,8^\circ$, $\gamma \approx 30,3^\circ$, $c \approx 2,8$ cm och arean $2,6$ cm^2.

b) Arean är $3,9$ kvadratcentimeter.

Övning 1.15 (5B1134:Tentamen:060113:1).

a) Sidlängderna är 10 cm, 13 cm och 14 cm, med två gällande siffrors noggrannhet.

Övning 1.16 (5B1134:Tentamen:060123:1).

a) Det finns två fall. I det första är de övriga vinklarna $\beta \approx 50,3^\circ$, $\gamma \approx 106^\circ$, den tredje sidans längd $c \approx 11,0$ cm och arean $19,5$ cm^2. I det andra fallet är $\beta \approx 129,7^\circ$, $\gamma \approx 26,6^\circ$, $c \approx 5,12$ cm och arean $9,05$ cm^2.

b) Arean är $4,7$ kvadratcentimeter.

Övning 1.17 (5B1134:KS1:2006).

a) Sidan AC är $7,5$ m, vinkeln vid B är 81° och vinkeln vid C är 43°.

b) Triangelns area är 16 kvadratmeter.

c) Områdets area är $0,45$ kvadratmeter.

Övning 1.18 (5B1134:Tentamen:061016:1).

a) Vinklarna är $\alpha \approx 23,7^\circ$, $\beta \approx 104,6^\circ$ och $\gamma \approx 51,7^\circ$, med en decimals noggrannhet.

b) Fyrhörningens area är $11,5\ \mathrm{cm}^2$.

c) Cirkelsegmentets area är $1,68\ \mathrm{cm}^2$.

Övning 1.19 (5B1134:Tentamen:070116:1).

a) Vinklarna är $16,5^\circ$, $18,2^\circ$ och $137,5^\circ$. Arean är 138 cm^2.

b) Arean av den skuggade delen av figuren är $2\pi - 3\sqrt{3}$ cm^2.

Övning 1.20 (SF1620:KS1:2007).

a) Det finns två möjligheter. I det ena fallet är $\gamma \approx 76^\circ$, $\gamma \approx 70^\circ$, $b \approx 7,0$ m och triangelns area 14 m^2. I det andra fallet är $\gamma \approx 104^\circ$, $\beta \approx 42^\circ$, $b \approx 5,0$ m och triangelns area 10 m^2.

b) Områdets area är 73 cm^2.

Övning 1.21 (SF1620:Tentamen:071015:1)**.**

a) Vinklarna är 16°, 31° och 133°.

b) Sidan BC ska vara längre än $2,25$ cm och kortare än $3,5$ m för att det ska finnas två möjligheter för den tredje sidans längd.

c) Betesdjuret kan komma åt 49% av betet.

Övning 1.22 (SF1620:Tentamen:080119:1)**.**

a) Vinklarna är $B \approx 137,2^\circ$, $C \approx 70,7^\circ$ och $D \approx 99,1^\circ$. Arean av fyrhörningen är 920 cm^2.

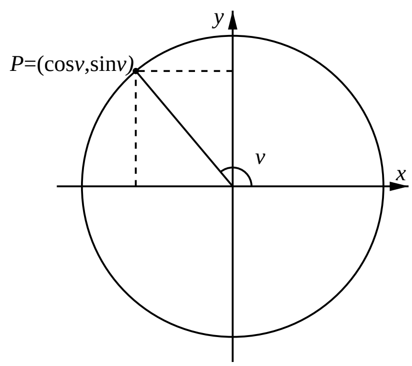
b) Kvoterna är lika med diametern på den cirkel som går genom triangelns tre hörn.

2 Andra veckan — Trigonometri

2.1 De trigonometriska funktionerna och enhetscirkeln

Vi skall definiera *sinus* och *cosinus* för alla reella vinklar. Genom att $\tan(t) = \sin(t)/\cos(t)$ går det också att definiera tangens för alla värden på t där $\cos(t) \neq 0$.

Ett användbart verktyg för detta är *enhetscirkeln* som är en cirkel med radie 1 och med centrum i origo i ett rätvinkligt koordinatsystem med en horisontell x-axel och en vertikal y-axel.



Vi mäter vinkeln v moturs från x-axeln. För varje vinkel v får vi en punkt P på cirkels rand. Vi *definierar* koordinaterna till punktet P att vara

$$\begin{cases} x &= \cos v, \\ y &= \sin v. \end{cases}$$

Märk att vi tillåter att man går flera varv runt cirkeln. För varje varv ökar vinkeln v med 2π radianer, eller $360°$. Observera att om vinkeln mäts i radianer så ges omkretsen av 2π, och speciellt motsvarar vinkeln v precis hur långt det är att gå utefter cirkeln från $(1, 0)$ till P. Märk också att denna definitionen generaliserar defintionen vi gav förra veckan för vinklar v i intervallet $(0, \pi/2)$.

Läskoll 2.1.1. *Använd enhetscirkeln för att bestämma* $\cos(t)$ *och* $\sin(t)$ *när* $t = 0, \pi/2$ *och* π.

Sats 2.1 (Trigonometriska ettan)**.** *För alla värden på t gäller att*

$$\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1.$$

Läskoll 2.1.2. *Bevisa satsen genom att använda ekvationen för enhetscirkeln.*

Nu som vi har definierad $\sin(t)$ och $\cos(t)$ för alla värden av t kan vi också generalisera triangelsatserna (Sats 1.2, 1.3 och 1.4) för godtyckliga trianglar.

Sats 2.2. *Låt ABC vara en triangel, med vinklar α, β och γ och motstående sidor med respektiva längder a, b och c. Arean av triangeln ges av*

$$\frac{1}{2}bc\sin(\alpha) = \frac{1}{2}ac\sin(\beta) = \frac{1}{2}ab\sin(\gamma).$$

Vi har sambandet

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)},$$

och sambanden

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha), \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta) \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ac\cos(\gamma).$$

Läskoll 2.1.3. *Alla påståendarna ovan har vi tidigare visat för vinklar $t < \pi/2$. Använd detta för att visa det almänna fallet.*

Läskoll 2.1.4. *Generalisera och visa Sats 1.5 för vinklar $v \leq \pi$.*

2.2 Additionssatserna

Sats 2.3 (Additionssatsen för sinus)**.** *För alla t och u gäller att*

$$\sin(t+u) = \sin(t)\cos(u) + \cos(t)\sin(u).$$

Läskoll 2.2.1. *Bevisa additionssatsen. Låt, för givna värden, t och u vara de mindre två vinklarna i en triangel. Använd Areasatsen (1.2) för att bestämma arean med hjälp av den största vinkeln. Betrakta därefter höjden mot den största vinkeln och använd Areasatsen på de två mindre trianglarna.*

Det är klart att om vi vrider enhetscirkeln med $\pi/2$ varv moturs så kommer x-axeln hamna där y-axeln tidigare var. Detta betyder att cosinus- och sinusfunktionerna är lika varandra efter en förskjutning med $\pi/2$ radianer. Mera precist har vi att

$$\cos(t) = \sin(t + \pi/2),$$

för alla t.

Sats 2.4 (Additionssatserna för sinus och cosinus)**.** *För alla t och u gäller att*

$$\begin{aligned}
\sin(t+u) &= \sin(t)\cos(u) + \cos(t)\sin(u),\\
\sin(t-u) &= \sin(t)\cos(u) - \cos(t)\sin(u),\\
\cos(t+u) &= \cos(t)\cos(u) - \sin(t)\sin(u),\\
\cos(t-u) &= \cos(t)\cos(u) + \sin(t)\sin(u).
\end{aligned}$$

Läskoll 2.2.2. *Använd föskjutningar med 90° eller $\pi/2$ för att härleda de övriga formlerna från additionssatsen för sinus.*

Med hjälp av dessa kan vi härleda många andra formler och samband för de trigonometriska funktionerna. De första är formlerna för *dubbla vinkeln*, dvs det vi får i additionssatserna om $u = t$.

Sats 2.5 (Formler för dubbla vinkeln)**.** *För alla värden på t gäller att*

$$\begin{cases} \sin(2t) &= 2\sin(t)\cos(t), \\ \cos(2t) &= \cos^2(t) - \sin^2(t). \end{cases}$$

Uttrycket för cosinus för dubbla vinkeln kan skrivas om på två sätt med hjälp av den trigonometriska ettan. Vi får att

$$\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = 2\cos^2(t) - 1 = 1 - 2\sin^2(t).$$

Detta kan vi använda för att härleda formler för halva vinkeln.

Sats 2.6 (Formler för halva vinkeln)**.** *För alla värden på t gäller att*

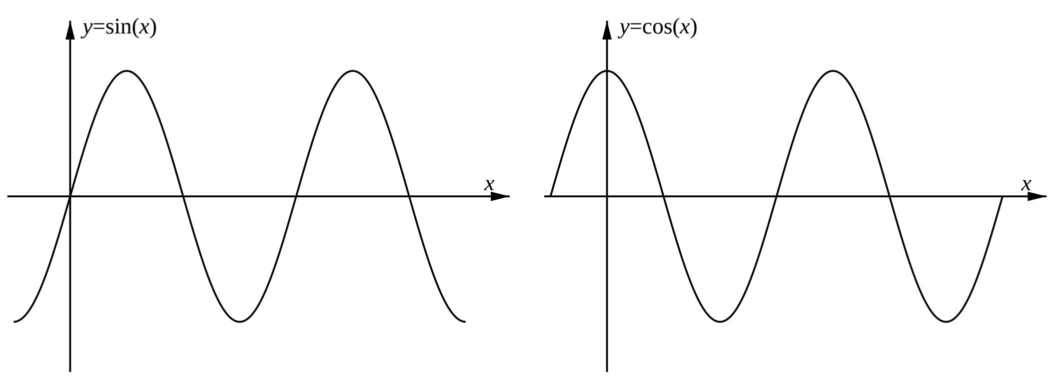
$$\sin^2\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1-\cos(t)}{2} \quad \textit{och} \quad \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1+\cos(t)}{2}.$$

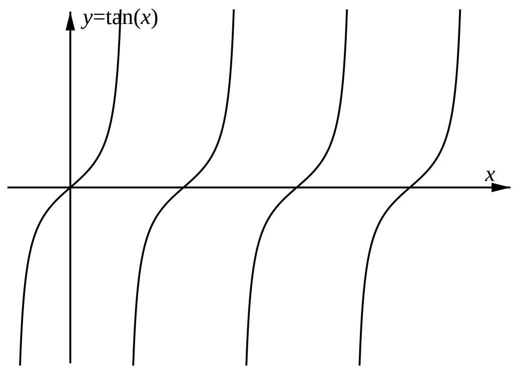
Läskoll 2.2.3. *Kolla att Sats 2.5 och Sats 2.6 stämmer.*

2.3 Funktionsgrafer

Har man en funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ så är detta inget annat än en tillordning som till varje tal x bestämmer ett annat tal $f(x)$. *Grafen* till en funktion f är mängden av punkt i planet på formen $(x, f(x))$. Dessa två begrepp, *funktion* och *funktionsgraf*, är det viktigt att hålla isär.

Innan vi ritar funktionsgraferna till de trigonometriska funktionerna, märker vi följande: Maxvärdet till sinus- och cosinusfunktionerna är 1, och minimum är -1. Vidare har vi att funktionsgrafen till sinus skär x-axeln i $x = \pi n$, för alla heltal n. Funktionsgrafen till cosinus skär x-axeln i $x = \pi/2 + \pi n = (2n+1)\pi/2$, för alla heltal n. Graferna till de trigonometriska funktionerna ser ut som





Läskoll 2.3.1. *Rita in koordinater till x-axeln och y-axeln för funktionsgraferna till sinus och cosinus.*

Funktionen $\tan$ har inget maximum eller minimum, och funktionen är ej definierad för värderna $t = (2n+1)\pi/2$. Vidare ser vi att cosinus är en *jämn* funktion, dvs

$$\cos(-t) = \cos(t), \qquad \text{för alla } t$$

och att sinus och tangens är en *udda* funktioner, dvs

$$\sin(-t) = -\sin(t) \quad \text{och} \quad \tan(-t) = -\tan(t), \qquad \text{för alla } t.$$

2.4 Period

En funktion $f(t)$ är *periodisk* om det finns ett tal $\omega > 0$ sådan att $f(t+\omega) = f(t)$ för alla värden t. Funktionen har *period* ω om ω är det minsta talet $\omega > 0$ sådan att $f(t+\omega) = f(t)$, för alla t.

Av definitionen av både sinus- och cosinusfunktionen är det klart att de är periodiska, och att perioden $360°$, eller 2π radianer. Med andra ord har vi att

$$\begin{array}{lllll} \sin(t+2\pi) & = \sin(t) & \text{eller} & \sin(t+360°) & = \sin(t) \\ \cos(t+2\pi) & = \cos(t) & \text{eller} & \cos(t+360°) & = \cos(t) \end{array}$$

för alla värden på t. Tangensfunktionen är också periodisk, men perioden är $180°$ eller π radianer, dvs

$$\tan(t+\pi) \quad = \tan(t) \quad \text{eller} \quad \tan(t+180°) \quad = \tan(t),$$

för alla värden på t.

Läskoll 2.4.1. *Visa att perioden, T, för funktionen $f(t) = A\sin(\omega t + \phi)$, där A, ω och ϕ är konstanter, ges av*

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

2.5 Amplitud, vinkelhastighet och fasförskjutning

Ett vanligt sätt som sinusfunktioner förekommer i tillämpningar är på formen

$$f(t) = A\sin(\omega t + \phi),$$

där A är *amplituden*, ω (omega) är *vinkelhastigheten* och ϕ (fi) är *fasförskjutningen*. Genom att använda additionssatsen för sinus kan vi skriva om ett sådant uttryck som

$$f(t) = A\sin\phi\cos\omega t + A\cos\phi\sin\omega t.$$

Notera att både $\sin\phi$ och $\cos\phi$ är konstanter. Funktionen $f(t)$ är med andra ord på formen $a\cos u + b\sin u$, där a och b är konstanter, och där $u = \omega t$. Det betyder också att vi kan gå åt andra hållet och skriva om ett uttryck på formen

$$f(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t$$

som ett uttryck med amplitud och fasförskjutning om vi får att

$$\begin{cases} a &= A\sin\phi, \\ b &= A\cos\phi, \end{cases}$$

för några reella tal A och ϕ.

Läskoll 2.5.1. *Om talen A och ϕ är sådan att $A\sin(\phi) = a$ och $A\cos(\phi) = b \neq 0$. Visa att då har vi att*

$$a^2 + b^2 = A^2 \quad \textit{och} \quad \frac{a}{b} = \tan\phi.$$

2.6 Trigonometriska ekvationer

De mest grundläggande trigonometriska ekvationerna har formen

$$(1) \quad \sin t = a, \qquad (2) \quad \cos t = a, \qquad \text{eller} \qquad (3) \quad \tan t = a.$$

Om vi går tilbaks till graferna för dessa tre funktioner så ges lösningarna till ekvationerna ovan som skärningen mellan funktionsgraferna och den horisontella linjen $y = a$. För att de första två ekvationerna ska ha någon reell lösning alls krävs att $-1 \leq a \leq 1$, medan den tredje ekvationen alltid har reella lösningar.

Eftersom funktionerna $\sin(t)$, $\cos(t)$ och $\tan(t)$ är periodiska förekommer lösningarna till ekvationerna också periodiskt. Om $t = t_0$ är en lösning till den första ekvationen är också $t_0 + 2\pi$, och faktisk vill $t_0 + 2\pi n$, för heltal n, vara en lösning. Då $\cos$ också har period 2π vill $t_0 + 2\pi n$ vara lösningar till den andra ekvationen om $\cos(t_0) = a$. Om $t = t_0$ är en lösning till den tredje ekvationen är $t_0 + \pi n$ också lösningar.

Genom att titta på enhetscirkeln, eller funktionsgraferna, ser vi att vi inte har fångat upp alla lösningar. I intervallet $0 \leq t < 2\pi$ finns det två lösningar båda till (1) och till (2), om $-1 < a < 1$. Däremot finns det för $a = \pm 1$ bara en lösning i samma intervall.

Genom egenskaperna hos sinus och cosinus kan vi formulera detta som att om t_0 är en lösning till (1), så är också $180° - t_0$, eller $\pi - t_0$ en lösning. På samma sätt är $-t_0$ en lösning till (2) om t_0 är det. Vi samanfattar.

Sats 2.7. *Om* $\sin(p) = a$ *då ges alla lösningar till ekvationen* $\sin(x) = a$ *som* $x = 2\pi \pm p$ *för alla heltal* n*. Om* $\cos(p) = a$ *då ges alla lösningar till ekvationen* $\cos(x) = a$ *som* $x = 2\pi \pm p$ *för alla heltal* n*.*

Läskoll 2.6.1. *Bestäm alla lösningar till ekvationerna*

$$a) \quad \sin(x) = 1/2 \quad \textit{och} \quad b) \quad 2\cos(x) = \sqrt{2}.$$

2.7 Allmänna trigonometriska ekvationer

En mer allmän trigonometrisk ekvation kan ofta formuleras om till en av de grundläggande varianterna genom att använda olika trigonometriska och algebraiska samband. Exempelvis kan vi för en ekvation

$$a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t) = c$$

först skriva om vänsterledet som $A\sin(\omega t + \phi)$. Vi får då

$$A\sin(\omega t + \phi) = c$$

Sedan kan vi göra variabelbytet $x = \omega t + \phi$ och ekvationen hamnar då i den mer grundläggande formen

$$\sin x = \frac{c}{A}.$$

När vi har löst den och får en lösningar

$$x = x_0 + 2\pi n \qquad \text{och} \qquad x = \pi - x_0 + 2\pi n$$

kan vi lösa ut t som $(x - \phi)/\omega$ och

$$t = \frac{x_0 - \phi}{\omega} + \frac{2\pi n}{\omega} \qquad \text{och} \qquad t = \frac{\pi - x_0 - \phi}{\omega} + \frac{2\pi n}{\omega}.$$

2.8 Trigonometriska inverser

De två föregående sektionerna diskuterade existensen av lösningar till de grundläggande trigonometriska ekvationera (1), (2) och (3) ovan. I praxis kan man lätt föreställa sig att man vill hitta lösningarna. Till detta kan man använda miniräknarnas $\arcsin$-, $\arccos$- och $\arctan$-funktioner. Ok, dessa funktioner är läskiga, och ibland har de helt andra namn, men låt oss ta en i taget. Om vi börjar med ekvationen

$$\sin t = a,$$

och tittar på funktionsgrafen till sinus. Lösningarna ges av skärningspunkterna mellan funktionsgrafen och linjen $y = a$. Vi kan anta att $-1 \leq a \leq 1$, annars har vi inga lösningar. Slår vi nu in $\arcsin(a)$ i vår miniräknare så kommer den ge oss det unika tal t i det halvöppna intervallet $(-\pi/2, \pi/2]$, sådan att $\sin(t) = a$.

Det är inget unikt eller speciellt med vårt val av intervall, men vi har valt ett. Märk också att vi har valt att inte ta med $-\pi/2$ i intervallet, men att vi tar med $\pi/2$. Poängen är att vi har valt ett intervall sådant att ekvationen $\sin(t) = a$ har en unik lösning i intervallet.

På motsvarande sätt ger funktionen $\arccos(a)$ det unika tal t i det halvöppna intevallet $[0, \pi)$ sådan att $\cos(t) = a$, för $-1 \leq a \leq 1$ och funktionen $\arctan(a)$ ger det unika tal t i det öppna intervallet $(-\pi/2, \pi/2)$ sådan att $\tan(t) = a$, för reella tal a.

Uppgifter

Övning A. 2.1. *Bestäm, utan miniräknare,* $\cos v$ *om* $\sin v = 3/5$ *och* $0 \leq v \leq \pi/2$.

Övning A. 2.2. *Bestäm, utan miniräknare,* $\sin v$ *om* $\cos v = -4/5$ *och* $\pi \leq v \leq 3\pi/2$.

Övning A. 2.3. *Använd enhetscirkeln och Pythagoras sats för att bestämma* $\cos(t)$ *och* $\sin(t)$ *när* $t = \pi/3, \pi/4$ *och* $\pi/6$.

Övning A. 2.4. *Bestäm* $\cos(t + u)$ *och* $\cos(t - u)$ *när* $\cos(t) = 1/5$ *och* $\sin u = 3/5$*, och* $0 \leq t, u \leq \pi/2$.

Övning A. 2.5. *Bestäm* $\cos(t + u)$ *och* $\cos(t - u)$ *när* $\cos(t) = -4/5$ *och* $sin(u) = 1/3$ *och* $\pi/2 \leq t, u \leq \pi$.

Övning A. 2.6. *Bestäm, utan miniräknare*

$$\sin \frac{5\pi}{12} \quad \textit{och} \quad \sin \frac{\pi}{12}.$$

Övning A. 2.7. *Bestäm amplitud, vinkelhastighet och fasförskjutning till funktionerna*

$$f(t) = 3\sin(t - 5), \quad g(t) = 2\sin(t/2 + \pi) \quad \textit{och} \quad h(t) = 4\cos(5t).$$

Övning A. 2.8. *Bestäm amplitud, vinkelhastighet och fasförskjutning till funktionen*

$$f(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos(5t) + \sin(5t)).$$

Övning A. 2.9. *En Nautisk mil defineras som bågländen längs ekvatorn, under 1 minut rest med jordens hastighet. Använd att jordens radie är* $6,378.135$ *km för att bestämma en Nautisk mil.*

Övning A. 2.10. *Bestäm, utan miniräknare,* $\arcsin(0)$ *och* $\arcsin(\frac{\sqrt{2}}{2})$.

Övning A. 2.11. *Bestäm, utan miniräknare* $\sin(\arccos(\frac{1}{\sqrt{2}}))$ *och* $\sin(\arccos(\frac{1}{4}))$.

Övning A. 2.12. *Lös, utan miniräknara, ekvationerna*

$$a) \quad 2\arccos x = \pi \quad \textit{och} \quad b) \quad 12\arcsin x - 4\pi = 0.$$

2.9 Uppgifter från kontrollskrivningar och tentamina

Övning 2.9.1.

a) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen

$$\tan(3\pi x + \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

(4)

b) I en triangel är cosinus för två av vinklarna $1/4$, respektive $1/2$. Använd additionsformeln för cosinus för att bestämma cosinus av den tredje vinkeln. **(3)**

c) Om $\cos\alpha = 1/4$ och $\cos\beta = x$, vad är det då för villkor på x för att triangeln har två vinklar som är lika? **(2)**

Övning 2.9.2.

a) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen

$$\sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{2},$$

där $\omega = 100\pi$. **(4)**

b) Skriv om $5\sin\omega t - 12\cos\omega t$ på formen $A\sin(\omega t + \phi)$. **(3)**

c) Bestäm det största och det minsta värdet av funktionen

$$f(x) = a\sin x + b\cos x + c$$

där a, b och c är reella konstanter. **(2)**

Övning 2.9.3.

a) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen

$$\sin 4x = \cos 5x.$$

(3)

b) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen

$$\cos x - \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(4)

c) Använd formeln för cosinus av dubbla vinkeln för att finna ett exakt uttryck för $\sin\pi/12$. **(2)**

Övning 2.9.4.

a) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen

$$\tan 2x = \sqrt{3}.$$

(3)

b) För att bestämma extremvärdena för funktionen $f(x) = \sin 2x \cos x$ leds man till att finna nollställena till derivatan $g(x) = f'(x) = 2\cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x$. Förenkla uttrycket för $g(x)$ och bestäm alla lösningar till den trigonometriska ekvationen $g(x) = 0$. **(4)**

c) Härled formeln

$$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}$$

med hjälp av någon av additionsformlerna. **(2)**

Övning 2.9.5.

a) Skriv om $\sin x - \sqrt{3}\cos x$ på formen $A\sin(x+\phi)$. **(3)**

b) Använd resultatet från a) för att bestämma samtliga lösningar till ekvationen

$$\sin x - \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2}.$$

(4)

c) Härled, med hjälp av additionsformlerna och trigonometriska ettan, formeln för $\sin(x/2)$ uttryckt i $\cos x$. **(2)**

Övning 2.9.6.

a) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen **(4)**

$$\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

b) Använd additionsformlerna och trigonometriska ettan för att skriva om $\sin 3x$ som ett polynom i $\sin x$ och $\cos 3x$ som polynom i $\cos x$. **(5)**

Övning 2.9.7.

a) Rita upp grafen för funktionen $f(x) = 3,5\cos(4,4\,x)$ i intervallet $0 \leq x \leq 2\pi/3$ och bestäm alla lösningar till ekvationen

$$3,5\cos(4,4\,x) = 1,2$$

i samma intervall. Ange lösningarna med två värdesiffror. **(4)**

b) Hur många lösningar har ekvationen

$$\sin(\omega t + \phi) = 0,242$$

i intervallet 0 ms $\leq t \leq 94$ ms, om $\omega = 3,14 \cdot 10^2$ radianer/s och $\phi = -2\pi/3$? **(2)**

b) Man kan skriva om $a\sin(\omega t) + b\sin(\omega t + 2\pi/3)$ på formen $A\sin(\omega t + \phi)$. Bestäm amplituden A uttryckt i a och b. **(3)**

Övning 2.9.8.

a) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen

$$\sin\left(\frac{2x - \pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(3)

b) Bestäm den minsta positiva lösningen till ekvationen

$$1,2\sin x + 1,4\cos x = 0,54$$

med två gällande siffrors noggrannhet. **(4)**

c) Använd sinussatsen för att härleda additionssatsen för sinus i det fall då alla inblandade vinklar ligger mellan $0°$ och $180°$. **(2)**

Övning 2.9.9.

a) Bestäm samtliga nollställen till funktionen

$$f(x) = 2\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) + 1.$$

(3)

b) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen

$$\sin x + \sin 2x = 0.$$

(3)

c) Vilket är det minsta positiva tal, x, där det inte spelar någon roll om man har miniräknaren inställd på radianer eller grader när man skall beräkna $\sin x$? **(3)**

Övning 2.9.10.

a) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen

$$\sin\left(5x - \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(3)

b) Bestäm ett närmevärde med två gällande siffror till den minsta positiva lösningen till ekvationen

$$\sin x + 2\cos x = \sqrt{2}$$

(4)

c) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0.$$

(2)

Övning 2.9.11.

a) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen

$$\tan(2t + \pi/5) = -\sqrt{3}$$

(4)

b) Bestäm med två värdesiffrors noggrannhet konstanterna A och ϕ sådana att

$$A\sin(x + \phi) = 5\sin x - 3\cos x.$$

(3)

c) Skriv $\cos 4x$ som ett polynom i $\cos x$. **(2)**

Övning 2.9.12.

a) Bestäm samtliga lösningar i intervallet $5\pi \leq t \leq 7\pi$ till ekvationen

$$\sin(t) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ange svaret exakt i radianer. **(3)**

b) Bestäm den minsta positiva lösningen till ekvationen

$$5 \sin x + 8 \cos x = 0$$

med en noggrannhet på tre gällande siffor. **(3)**

c) Uttrycket $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x$ kan skrivas om på formen $A \sin(2x + \phi) + B$. Bestäm konstanterna A och B uttryckta i a, b och c. **(3)**

Övning 2.9.13.

a) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen

$$\tan(3x + \pi/4) = \sqrt{3}.$$

(3)

c) Bestäm den minsta positiva lösningen till ekvationen

$$2,0 \sin x - 3,2 \cos x = 2,4.$$

Ange svaret som ett närmevärde med två decimalers noggrannhet. **(4)**

c) Bestäm konstanterna a och b så att kurvan $y = a \cos x + b \sin x$ går genom punkterna $(x, y) = (0, 2)$ och $(x, y) = (\pi/3, -1)$. **(2)**

Övning 2.9.14.

a) Bestäm alla lösningar till ekvationen

$$\sin(5x + 3\pi/5) = 0,96$$

som ligger i intervallet $0 \le x \le \pi$. Ange svaren som närmevärden med två decimalers noggrannhet. **(4)**

b) Bestäm exakta uttryck för samtliga lösningar till ekvationen

$$\sin x - \cos x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

(3)

c) Härled formeln för tangens av dubbla vinkeln, det vill säga uttryck $\tan 2x$ i $\tan x$. **(2)**

Övning 2.9.15.

a) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen

$$\cos(2x + \pi/3) = 0,62$$

i intervallet $0 \le x \le 2\pi$. Ange svaren med tre gällande siffrors noggrannhet. **(3)**

b) Skriv om uttrycket $4\sin x + 3\cos x$ på formen $A\cos(x+\phi)$. **(3)**

c) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen

$$\sin^2 x + \sin 2x = 1.$$

(3)

Övning 2.9.16.

a) Bestäm samtliga lösningar i intervallet $-\pi/4 \leq x \leq \pi/4$ till ekvationen

$$2\tan(3x+2) = 1.$$

Ange svaren i radianer med två gällande siffrors noggrannhet. **(3)**

b) Skriv $\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x$ på formen $A\sin(2x+\phi)$. Ange svaret exakt. **(3)**

c) Bestäm exakta värden på samtliga lösningar till ekvationen

$$2\sin^2 x + \sin 2x = 2.$$

(3)

Övning 2.9.17.

a) Bestäm de två minsta positiva lösningarna till ekvationen

$$13\sin\left(\frac{3\pi t - 2\pi}{10}\right) = 8.$$

Ange svaren med tre gällande siffrors noggrannhet. **(3)**

b) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen

$$\sin^2 t + 2\sin t\cos t + 3\cos^2 t = 1$$

Ange svaren på exakt form. **(3)**

c) Bestäm konstanterna a, b och ω så att ekvationen

$$a\cos\omega t + b\sin\omega t = 2$$

har lösningarna $t = -2 + 24n$ och $t = 4 + 24n$, där n är ett godtyckligt heltal. Ange svaren på exakt form. **(3)**

Övning 2.9.18.

a) Bestäm den minsta positiva lösningen till ekvationen

$$\cos(3x + \pi/7) = 1/4.$$

Ange svaret i radianer med två värdesiffrors noggrannhet. **(3)**

b) Bestäm konstanterna A och ϕ så att $2\cos 2x + \sin 2x = A\cos(2x + \phi)$. Ange svaren som närmevärden med två värdesiffrors noggrannhet. **(3)**

c) Bestäm det exakta antalet lösningar till ekvationen $\tan 5x = \sin 10x$ i intervallet $0 \leq x \leq 100$. **(3)**

Övning 2.9.19.

a) Bestäm den lösning till ekvationen

$$5\sin(3\pi t + 1) = 3$$

som ligger närmast $t = 3$. Ange svaret som ett närmevärde med två decimalers noggrannhet. **(4)**

b) Skriv $\sin v - \sin(v + 21°) + \sin(v + 110°)$ på formen $A\sin(v + \phi)$. Ange A med två gällande siffrors noggrannhet ϕ i hela grader. **(3)**

c) I samband med variabelbyte i integraler är det intressant att kunna uttrycka $\sin x$ och $\cos x$ som funktioner av $\tan(x/2)$. Härled ett uttryck för $\sin x$ som inte innehåller några andra trigonometriska funktioner än $\tan(x/2)$. **(2)**

Övning 2.9.20.

a) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen

$$4\sin(x/2 + \pi/6) = -2.$$

Ange svaret på exakt form. **(3)**

b) Bestäm antalet lösningar till ekvationen

$$3\sin x - 4\cos x = 2$$

i intervallet $0 \leq x \leq 20$. **(4)**

c) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen

$$\sin^3 x + \cos^3 x = 1.$$

(2)

Övning 2.9.21.

a) Bestäm ett närmevärde med två decimalers noggrannhet till den minsta positiva lösningen till ekvationen

$$\tan(2x - \pi/3) + 2 = 0.$$

(3)

b) Bestäm antalet lösningar till

$$5\sin(3x) - 12\cos(3x) = 12$$

i intervallet $0 \leq x \leq 10$. **(4)**

c) Bestäm exakta värden till samtliga lösningar till ekvationen

$$\sin^2(x) + \cos(x) = 1.$$

(2)

2.10 Facit

Övning 2.1 (5B1134:Modelltentamen:2).

a) $x = 2/9 + n/3$, där n är ett heltal.

b) Cosinus för den tredje vinkeln är $(3\sqrt{5} - 1)/8$.

c) $x = 1/4$ eller $x = \sqrt{6}/4$.

Övning 2.2 (5B1134:KS:2:2003).

a) Samtliga lösningar ges av $t = \pm 1/150 + n/50$, där n är ett godtyckligt heltal.

b) $5 \sin \omega t - 12 \cos \omega t = 13 \sin(\omega t + \phi)$ där $\phi = \arctan(-12/5) \approx -1,18$.

c) Det största värdet är $c + \sqrt{a^2 + b^2}$ och det minsta är $c - \sqrt{a^2 + b^2}$.

Övning 2.3 (5B1134:Tentamen:031013:2).

a) Lösningarna är $x = \pi(1 - 4n)/18$ och $x = \pi(4n - 1)/2$ där n är ett godtyckligt heltal.

b) Lösningarna är $x = (-3 \pm 4)\pi/12 + 2\pi n$ där n är ett godtyckligt heltal.

c) Ett exakt värde är $\sin(\pi/12) = (\sqrt{2 - \sqrt{3}})/2$.

Övning 2.4 (5B1134:Tentamen:031103:2).

a) Lösningarna är $x = \pi/6 + n\pi/2$, där n är ett godtyckligt heltal.

b) Vi kan skriva $g(x) = 2 \cos x(\cos^2 x - 2 \sin^2 x)$ och lösningarna är $x = \pi/2 + n\pi$, och $x = \pm \arctan(\sqrt{2}/2) + n\pi \approx \pm 0,62 + n\pi$ där n är ett godtyckligt heltal.

Övning 2.5 (5B1134:Tentamen:040109:2).

a) $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 2 \sin(x - \pi/3)$.

b) Lösningarna är $x = 7\pi/12 + 2\pi n$ och $x = 13\pi/12 + 2\pi n$, där n är ett godtyckligt heltal.

c) $\sin(x/2) = \pm\sqrt{(1 - \cos x)/2}$, med positivt tecken om $4\pi n \leq x \leq 4\pi n + 2\pi$ för något heltal n, annars negativt.

Övning 2.6 (5B1134:Tentamen:040821:2).

a) Lösningarna är $x = \pi/3 + 2\pi n/3$ och $x = \pi/2 + 2\pi n/3$, där n är ett godtyckligt heltal.

b) Vi får att $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$ och $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$.

Övning 2.7 (5B1134:KS2:2004).

a) Lösningarna är $x = 0,28$, $x = 1,2$ och $x = 1,7$.

b) Det finns nio lösningar till ekvationen i intervallet.

c) Amplituden är $A = \sqrt{a^2 - ab + b^2}$.

Övning 2.8 (5B1134:Tentamen:041011:2).

a) Lösningarna till ekvationen ges av $x = 5\pi/2 + 3\pi n$ och $x = 3\pi n$, där n är ett godtyckligt heltal. ($150^\circ + n \cdot 540^\circ$ och $n \cdot 540^\circ$.)

b) Den minsta positiva lösningen ges av $x \approx 2,0$.

Övning 2.9 (5B1134:Tentamen:041030:2).

a) Lösningarna är $x = 11\pi/36 + 2\pi n/3$ och $x = 19\pi/36 + 2\pi n/3$, där n är ett godtyckligt heltal.

b) Lösningarna är $x = n\pi$, $x = 2\pi/3 + 2\pi n$ och $x = 4\pi/3 + 2\pi n$ där n är ett godtyckligt heltal. (Lösningen kan också skrivas som $x = 2\pi n/3$ och $(2n + 1)\pi$, för godtyckligt n.)

c) Det minsta positiva tal som uppfyller kravet är $x = 180\pi/(180 + \pi)$.

Övning 2.10 (5B1134:Tentamen:050112:2).

a) Lösningarna är $23\pi/24 + 2\pi n/5$ och $29\pi/24 + 2\pi n/5$, där n är ett godtyckligt heltal.

b) Den minsta positiva lösningen är $x \approx 1,35$. ($77,3^\circ$)

c) Lösningarna är $n\pi/2$ och $\pm 2\pi/3 + 2\pi n$, där n är ett godtyckligt heltal.

Övning 2.11 (5B1134:Tentamen:050829:2).

a) Lösningarna ges av $x = -4\pi/15 + n\pi/2$, där n är ett godtyckligt heltal.

b) $A = \sqrt{34} \approx 5,8$.

c) $\cos 4x = 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1$.

Övning 2.12 (5B1134:KS2:2005).

a) Lösningarna $t = 16\pi/3$ och $t = 17\pi/3$ är de enda i det givna intervallet.

b) Den minsta positiva lösningen ges av $x = 2,13$ eller $x = 122^\circ$ med tre gällande siffrors noggrannhet.

c) $A = (\sqrt{b^2 + (c - a)^2})/2$ och $B = (a + c)/2$.

Övning 2.13 (5B1134:Tentamen:051017:2).

a) Lösningarna ges av $x = \pi/26 + n\pi/3$ där n är ett godtyckligt heltal.

b) Den minsta positiva lösningen ges av $x = 1,70$ radianer.

c) Konstanterna är $a = 2$ och $b = -4\sqrt{3}/3$.

Övning 2.14 (5B1134:Tentamen:051024:2).

a) Lösningarna i intervallet $0 \leq x \leq \pi$ är $x \approx 1,14$, $x \approx 1,25$, $x \approx 2,39$ och $x \approx 2,51$.

b) Samtliga lösningar ges av $x = 7\pi/3 + 2\pi n$ och $x = 11\pi/3 + 2\pi n$, där n är ett godtyckligt heltal.

c) $\tan 2x = 2 \tan x/(1 - \tan^2 x)$.

Övning 2.15 (5B1134:Tentamen:060113:2).

a) Lösningarna är $x = 2,17$, $x = 3,07$, $x = 5,31$ och $x = 6,21$, med tre gällande siffrors noggrannhet.

b) $4 \sin x + 3 \cos x = 5 \cos(x + \phi)$, där $\phi = -\arctan(4/3) \approx -0,927$.

c) Lösningarna är $x = \pi/2 + n\pi$ och $x = \arctan(1/2) + n\pi$, där n är ett odtyckligt heltal.

Övning 2.16 (5B1134:KS2:2006).

a) Lösningarna är $x = -0,51$ och $x = 0,54$, med två värdesiffrors noggrannhet.

b) $\sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x = 2 \sin(2x + \pi/3)$.

c) Lösningarna ges av $\pi/2 + n\pi$ och $x = \pi/4 + n\pi$, där n är ett godtyckligt heltal.

Övning 2.17 (5B1134:Tentamen:061016:2).

a) De två minsta positiva lösningarna är $t = 1,37$ och $t = 3,30$, med tre gällande siffrors noggrannhet.

b) Lösningarna ges av $t = \pi/2 + n\pi$ och $t = -\pi/4 + n\pi$, där n är ett godtyckligt heltal.

c) Konstanterna skall vara $a = \sqrt{3} + 1$, $b = \sqrt{3} - 1$ och $\omega = \pi/12$.

Övning 2.18 (5B1134:Tentamen:070116:2).

a) Den minsta positiva lösningen är $x \approx 0,29$.

b) $A = \sqrt{5} \approx 2,2$ och $\phi \approx -0,46$.

c) Det finns 479 lösningar till ekvationen i intervallet $0 \leq x \leq 100$.

Övning 2.19 (SF1620:KS2:2007).

a) Den lösning som ligger närmast $t = 3$ är $t \approx 2,83$.

b) $\sin v - \sin(v + 21^\circ) + \sin(v + 110^\circ) \approx 0,64 \sin(v + 115^\circ)$.

c) $\sin x = 2\tan(x/2)/(1 + \tan^2(x/2))$.

Övning 2.20 (SF1620:Tentamen:071015:2).

a) Lösningarna är $x = -2\pi/3 + 4\pi n$ och $x = 2\pi + 4\pi n$, där n är ett godtyckligt heltal.

b) Det finns sex lösningar till $3\sin x - 4\cos x = 2$ i intervallet $0 \leq x \leq 20$.

c) Lösningarn till ekvatinonen är $x = 2\pi n$ och $x = \pi/2 + 2\pi n$.

Övning 2.21 (SF1620:Tentamen:080119:2).

a) Den minsta positiva lösningen är $x \approx 1,54$.

b) Ekvationen har tio lösningar i intervallet $0 \leq x \leq 10$.

c) Lösningarna är $x = \pi/2 + n\pi$ och $x = 2\pi n$, för heltal n.

3 Tredje veckan — Komplexa tal och exponentialfunktionen

3.1 Komplex multiplikation

En punkt i planet är ett ordnat talpar (a, b). Två punkt i planet (a, b) och (c, d) kan adderas och subtraheras på ett naturligt sätt:

$$(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$$
$$(a, b) - (c, d) := (a - c, b - d),$$

där operationerna görs komponentvis. Vi skall definiera en multiplikation mellan punkter i planet, men vi kommer inte att göra detta komponentvis. Innan vi definierar multiplikationen ska vi införa en ny notation. Vi kommer härefter skriva talparet (a, b) som $a + b\,i$ där i enbart är en formell variabel som håller reda på den andra koordinaten. Vi tillåter då också beteckningarna $bi + a$ och $a + ib$ för talparet (a, b). Denna formella variabel i kallas *den imaginära enheten*.

Låt $a + b\,i$ och $c + d\,i$ vara två punkt i planet. Multiplikationen är definierad som

$$(a + b\,i) \cdot (c + d\,i) := (ac - bd) + (ad + bc)\,i.$$

Vi skall senare inse att multiplikationen är naturlig, även om den för ögonblicket kan verka lite konstig. Det vi nu skall lägga märke till är att multiplikationen av två talpar ger ett talpar. Denna multiplikation kallar vi *komplexa multiplikation*.

Läskoll 3.1.1. *Visa att* $(1, 0)$ *multiplicerad med ett godtyckligt talpar* (a, b) *ger tillbaka talparet* (a, b).

De reella talen kan vi tänka på som element på horisontal axeln, dvs punkt i planet på formen $(a, 0)$ eller $a + i \cdot 0$. Vi ser att multiplikationen utvidgar den vanliga multiplikationen för de reella talen och vi kommer därför i fortsättningen skriva punkter på formen $a + 0\,i$ enbart som a.

Läskoll 3.1.2. *Visa att talparet* $(0, 1)$ *multiplicerad med sig själv blir* -1.

I fortsättningen vill vi inte skriva ut talet noll. Talparen $a + 0\,i$ och $0 + b\,i$ skrivs i fortsättningen som a respektive $b\,i$. Speciellt kommer vi skriva i istället för $0 + 1\,i$. Med denna notation, och med Läskoll 3.1.2 har vi att $i^2 = -1$. Med andra ord har vi att ekvationen $z^2 = -1$ har lösning när vi betraktar komplex multiplikation.

3.2 Konjugat

Den multiplikativa inversen till ett nollskilt reellt tal $a \neq 0$ ges av $1/a$. Den multiplikativa inversen till en nollskild punkt $a + ib \neq 0 + i \cdot 0$ är inte lika enkel att beskriva. Vi börjar med att beskriva det komplexa konjugatet. Det *komplexa konjugatet* $\overline{a + ib}$ till ett talpar $a + ib$ definieras som

$$\overline{a + ib} := a + i(-b).$$

Med andra ord är komplexa konjugatet till ett talpar $a + ib$ det talpar vi får om vi speglar i den reella axeln. Speciellt har vi att $\overline{\overline{a + ib}} = a + ib$. Notationen vi använder för det komplexa konjugatet är $\overline{a + ib} = a - ib$.

Läskoll 3.2.1. *Visa att* $(a+ib)\cdot\overline{a+ib} = a^2+b^2$.

Sats 3.1. *Låt* $z = a+ib$ *vara ett nollskilt talpar. Då ges den multiplikativa inversen* z^{-1} *av formeln*

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}.$$

Läskoll 3.2.2. *Visa satsen genom att multiplicera ihop* z *och* z^{-1}.

Av satsen ovan har vi att varje nollskilt talpar $a+ib$ har en multiplikativ invers. Planet med den komplexa multiplikationen kallas för det *komplexa planet*, och talpar $a+ib$ kallas *komplexa tal*.

3.3 Polär form

Varje punkt i planet (a,b) kan beskrivas i polära koordinater. Istället för att ange placering av en punkt i x-led och y-led, kan vi ange placeringen med en vinkel θ och avstånd r från origo. Som tidigare mäter vi vinklar moturs, med början längs den positiva delen av den horisontella axeln. Vi mäter vinklar i radianer, och väljer dessa i det halvöppna intervallet $[0,2\pi)$.

Det är då klart [av figur] att det till varje punkt $(a,b)\neq(0,0)$ finns en unik radie r och en unik vinkel θ. Omvänt gäller att det givet ett positivt tal $r>0$, och en vinkel θ finns ett unik punkt (a,b) som motsvarar dessa. Sambandet ges av

$$\begin{cases} a &= r\cos\theta \\ b &= r\sin\theta \end{cases}$$

eller

$$\sqrt{a^2+b^2} = r \quad \text{och} \quad \begin{cases} \theta = \arccos\frac{a}{r} & \text{om } b\geq 0 \\ \theta = \pi + \arccos\frac{a}{r} & \text{om } b<0 \end{cases}$$

Vi definierar radien till $(0,0)$ att vara $r=0$. Då varje punkt i planet kan ges i polära koordinater så kan också komplexa tal $a+ib$ ges i polära koordinater (r,θ).

Läskoll 3.3.1. *Om* (r,θ) *är polära koordinater till ett komplext tal, visa då att det komplexa talet är* $r\cos(\theta)+ir\sin(\theta)$.

Läskoll 3.3.2. *Om* (r,θ) *är polära koordinater till ett komplext tal, visa att* $(r,-\theta)$ *är polära koordinater till dess konjugat.*

Sats 3.2. *Låt* $z=(r,\theta)$ *och* $w=(s,\varphi)$ *vara två komplexa tal i polära koordinater. Den komplexa produkten* $z\cdot w$ *har då polära koordinater* $zw=(rs,\theta+\varphi)$. *Med andra ord,*

$$z\cdot w = rs\cos(\theta+\varphi) + irs\sin(\theta+\varphi).$$

Läskoll 3.3.3. *Använd definitionen av komplex multiplikation och additionsformler för sinus och cosinus för att visa satsen.*

Sats 3.3. *Om $z = (r, \theta)$ är polärkoordinaterna till ett nollskilt komplext tal, då har vi att dets multiplicativa invers z^{-1} har polär koordinater $(1/r, -\theta)$.*

Läskoll 3.3.4. *Visa satsen genom att multiplicera ihop z och z^{-1}.*

Den komplexa multiplikationen vi definierade såg lite konstig ut, och speciellt var det inte alls klart vad den underliggande geometriska bilden var. Om vi har två punkt i planet $z = a + ib$ och $w = c = id$, vilken punkt i planet beskriver då produkten $z \cdot w$? Med de polära koordinaterna är svaret på denna fråga klart: Vi multiplicerar radierna och adderar vinklarna.

3.4 Exponentialfunktionen

Låt a vara ett reellt nollskilt tal. För varje positivt heltal $n > 0$ kommer vi att med a^n mena produkten av a med sig själv n gånger. Om $n = 0$ definierar vi $a^0 = 1$, och för negativa heltal $-n < 0$ sätter vi $a^{-n} := 1/a^n$.

För reella positiva tal $a > 0$ finns det för varje positivt heltal n en unik reell n'te enhetsrot b till a. Dvs., ett unikt tal b sådan att $b^n = a$. Vi definierar därför $a^{\frac{1}{n}} = b$. För negativa heltal $-n < 0$ definierar vi $a^{\frac{1}{-n}}$ att vara den unika n'te enhetsroten till $1/a$. Vi har då en naturlig definition för potenser av rationella tal $\frac{m}{n}$, vi sätter nämligen

$$a^{\frac{m}{n}} := (a^{\frac{1}{n}})^m.$$

Läskoll 3.4.1. *Kolla att definitionen över är oberoende av representant av rationelt tal, dvs. om $m/n = p/q$ då blir $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{p}{q}}$.*

Läskoll 3.4.2. *Visa att $a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{1/n}$.*

Det är sant att varje reelt tal x kan skrivas som en gräns av rationella tal $\{q_i\}_{i \geq 0}$. Vi tar detta faktum för givet, och definierar då potenser i allmänhet vid

$$a^x := \lim_{i \to \infty} \{a^{q_i}\}.$$

Vi kallar funktionen som skickar talet x till a^x, för *exponentialfunktionen* med bas a.

Sats 3.4. *Låt $a > 0$. För alla tal x och y har vi*

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y \quad \textit{och} \quad (a^x)^y = a^{xy}.$$

Läskoll 3.4.3. *Visa satsen för ratoniella tal x och y.*

Sats 3.5. *För $0 < a < 1$ är exponentialfunktionen strikt avtagande, dvs om $x > y$ då gäller att $a^x < a^y$. För $a > 1$ är exponentialfunktionen strikt växande.*

Läskoll 3.4.4. *Visa satsen för rationella tal x och y.*

Talet $a = 1$ är speciellt då $1^x = 1$ för alla reella tal x. I fortsättningen betraktar vi enbart positiv bastal $a \neq 1$.

Det är relativt klart att exponential funktionen a^x ($a \neq 1$) inte är en begränsad funktion. För $0 < a < 1$ kommer funktionsvärdet a^x att gå mot oändligheten när x går mot noll. Och för $1 < a$ kommer funktionsvärdet av a^x bli obegränsad när x blir större och större.

Av Sats 3.5 följer det nu att det för varje positivt tal $y > 0$ finns det ett unikt tal x sådant att $a^x = y$, givet att det positiva talet $a \neq 1$. Detta tal x skriver vi som $\log_a(y)$ och det beror på basen a och på det positiva talet y. Om vi tänker oss exponentialfunktionen som en funktion $a^{(-)}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ från de reella talen till de positiva talen, så är funktionen $\log_a\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dess inversa funktion. Vi kan skriva detta som sambandet

$$\log_a(a^x) = x \quad \text{och } a^{\log_a(y)} = y,$$

för alla reella tal x och alla positiva reella tal $y > 0$.

Sats 3.6. *Låt $a \neq 1$ vara ett positiv tal. För alla positiva tal $x, y > 0$ har vi*

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y) \quad \textit{och} \quad \log_a(x^y) = y \log_a(x).$$

Läskoll 3.4.5. *Visa satsen.*

3.5 Basen 10

Om basen $a = 10$ så skriver vi enbart $\log$ istället för $\log_{10}$. Logaritmfunktionen $\log$ är implementerad i de flesta miniräknare. Detta betyder att vi kan räkna ut $\log(y)$ värden för givna värden y. Speciellt kan vi då lösa ekvationer på formen $10^x = y$, där y är given och x är det sökta talet. Logaritmfunktionen $\log$ kan också användas för att lösa exponentialekvationer med godtycklig bas, vilket nästa sats illustrerar.

Sats 3.7. *Låt $a \neq 1$ vara ett positivt tal, och givet ett positivt tal $y > 0$. Ekvationen $a^x = y$ har lösningen*

$$x = \frac{\log(y)}{\log(a)}.$$

Bevis. Vi skriver $a = 10^{\log(a)}$ och $y = 10^{\log(y)}$. Av Sats 3.4 får vi sedan att

$$a^x = (10^{\log(a)})^x = 10^{\log(a)x}.$$

Ekvationen $a^x = y$ blir nu $10^{\log(a)x} = 10^{\log(y)}$. Vi använder inversfunktionen $\log$ på ekvationen och får

$$\log(a) \cdot x = \log(y).$$

När vi delar med det positiva talet $\log(a)$ har vi visat satsen. $\square$

Uppgifter

Övning A. 3.1. *Beräkna*

$$\begin{array}{llll} a) & (2+3i)\cdot(1-3i) & b) & 5i\cdot(5+i) \\ c) & \overline{(1+i)}\cdot\overline{(2-i)} & d) & \overline{(i)}\cdot(1+i) \end{array}$$

Övning A. 3.2. *Bestäm de komplexa tal $z=(a,b)$ sådana att*

$$\begin{array}{ll} a) & z^2=4. \\ b) & z^2=-4. \\ c) & z^2=6i. \end{array}$$

Övning A. 3.3. *Skriv följande tal på polärform*

$$\begin{array}{llllll} a) & 1-i & b) & -5-5i & c) & -19i \\ d) & 1+\sqrt{3}i & e) & 12 & f) & -\sqrt{3}-i. \end{array}$$

Övning A. 3.4. *Skriv följande tal på polärform*

$$\begin{array}{llll} a) & z^6 \text{ när } z=(2,\pi/3) & & \\ c) & z^5w^4 \text{ när } z=(1,\pi/4), \quad w=(2,\pi/12) & & \\ c) & (1-\sqrt{3})^9 & d) & (1-2i)^7 \end{array}$$

Övning A. 3.5. *Skriv följande tal på form $a+ib$*

$$\begin{array}{llllll} a) & (3+2i)(1-i) & b) & (1-i)^4 & c) & (\frac{1+2i}{1+i})^2 \\ d) & \frac{1}{1+i} & e) & \frac{1+2i}{1-i} & f) & \frac{1+3i}{1-i}+\frac{2i}{1+i} \end{array}$$

Övning A. 3.6. *Lös ekvationerna*

$$\begin{array}{llllllll} a) & 2^x=32 & b) & 10^x=1000 & c) & 3^{\log_3 4}=x^2 & d) & \log_3 x=4 \\ e) & \log x=1 & f) & \log(\log x)=2 & g) & (5^x)^2=30 & & \end{array}$$

Övning B. 3.1. *Lös ekvationerna för reella tal x och y.*

$$\begin{array}{ll} a) & i\cdot(y+ix)=y-(2+3x)i \\ b) & i3^x=10i+i5 \\ c) & \sin(3^x)+ix^2=1+i2y \end{array}$$

Övning B. 3.2. *Skriv uttrycken som $a+ib$ när*

$$\begin{array}{lll} a) & (c+di)^n\cdot(c-di)^n & n>0. \\ b) & i^n & n\geq 0. \\ c) & (1+i)^{401} & \end{array}$$

Övning B. 3.3. *Lös ekvationerna.*

$$\begin{array}{ll} a) & 2z^2 - 2i = 2 \\ b) & z^3 = \sqrt{3} + i \\ c) & z^4 = 2 - 2i \\ d) & z^6 = -\sqrt{3} - 3i \end{array}$$

Övning B. 3.4. *Lös ekvationen* $az^2 + bz + c = 0$ *där* $a \neq 0, b$ *och* c *är reella tal.*

Övning B. 3.5. *Låt* $a, b \neq 1$ *vara positiva tal. Visa att ekvationen* $a^x = y$ *har lösning* $x = \log_b(y)/\log_b(a)$ *(jmfr. bevis av Sats 3.7).*

3.6 Uppgifter från kontrollskrivningar och tentamina

Övning 3.6.1. *a) Skriv* $\frac{1+i}{2-i} + (1+2i)^2$ *formen* $a + bi$.

b) Hitta løsningarna till ekvationen $z^7 = 5$.

c) Løs ekvationen $z^2 + 2z = 1 + 2i$.

Övning 3.6.2. *a) Skriv* $(1-i)^5$ *på polärform.*

b) Hitta de reella tal x *och* y *sådan att*

$$i3^{\log_3(x^2)} + 2y = 2iy + x.$$

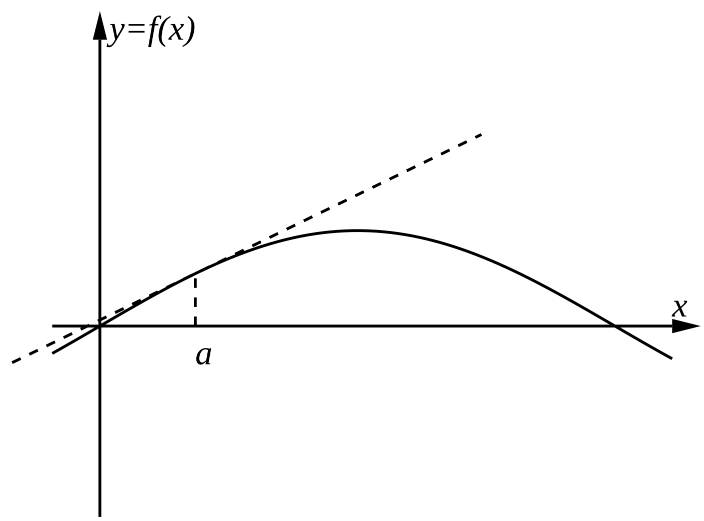
c) Bestäm alla lösningar till ekvationen $z^n = 1 + i$*, där* $n > 0$ *är et positivt heltal.*

4 Fjärde veckan — Deriveringsregler

4.1 Tolkningar av derivator

Tangentens lutning

Ett vanligt sätt att tänka sig *derivatan* av en funktion $f(x)$ är att se på grafen för funktionen och sedan på *tangentens lutning* i en viss punkt. Vi tänker oss då att det är lätt att inse vad som menas med en tangent, dvs en rät linje som går genom punkten $(a, f(a))$ och som på något vis ligger mot funktionsgrafen.



Vi kallar då riktningskoefficienten för tangenten i punkten $(a, f(a))$ för $f'(a)$ och vi kan då skriva tangentens ekvation som

$$y = f'(a)x + b$$

för någon konstant b. För att ta reda på b kan vi sätta in $x = a$ och ska då få

$$f(a) = f'(a)a + b \qquad \Longleftrightarrow \qquad b = f(a) - af'(a).$$

Linjär approximation

Ett annat sätt är att tänka sig att man förstorar upp området kring punkten $(a, f(a))$ så att grafen för funktionen ser ut som en linje som går genom punkten. Riktningskoefficienten för den linjen är $f'(a)$ och vi har att

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$$

för x nära a.

Vi kan använda oss av linjär approximation för att se hur derivatan bör fungera i olika situationer. Exempelvis kan vi se hur derivatan av en produkt bör vara genom att se på

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &\approx (f(a)+f'(a)\Delta x)(g(a)+g'(a)\Delta x) \\ &= f(a)g(a)+(f'(a)g(a)+f(a)g'(s))\Delta x+f'(a)g'(a)\Delta x^2 \\ &\approx f(a)g(a)+(f'(a)g(a)+f(a)g'(a))\Delta x \end{aligned}$$

eftersom Δx^2 är ännu mycket mindre om nu Δx redan är mycket litet. Alltså har vi kommit fram till att om $h(x)=f(x)g(x)$ har en derivata i punkten $x=a$ så skulle derivatan ges av

$$h'(a)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a).$$

Med hjälp av definitionen av derivata kommer man att kunna bevisa att detta faktiskt är helt korrekt, och kallas *produktregeln* eller *Leibniz regel*.

4.2 Feluppskattning

Om vi har mätt upp en storhet x med ett mätfel Δx men egentligen vill ha reda på $y=f(x)$ kan vi med hjälp av derivatan som en linjärapproximation se att mätfelet fortplantas till ett fel i y som ges av

$$y+\Delta y=f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\Delta x$$

vilket ger

$$\Delta y\approx f'(x)\Delta x.$$

Vi kan alltså se att $f'(x)$ talar om hur mycket felet förstoras eller förminskas när vi räknar ut y från det uppmätta värdet x.

4.3 Derivatans definition

När vi har de här två tolkningarna kan vi se hur man skulle kunna finna en mer formell och hållbar definition av vad som menas med derivata. Om vi tänker oss den första definitionen kan vi dra en linje gensom punkterna $(a,f(a))$ och $(a+h,f(a+h))$ och se på lutningen av denna. När h närmar sig noll ska lutningen på linjen närma sig tangentens lutning. Vi har ett striktare matematiskt begrepp som motsvarar *att närma sig* och som vi kallar *gränsvärde*. Vi ska inte gå mer in på definitionen av detta eftersom det kommer att studeras ingående i nästa kurs. Tanken är att vi bara vi går tillräckligt nära punkten är säkra på att vi ligger mycket nära gränsvärdet. Vi får alltså

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}. \tag{1}$$

Uttrycket (1) kallas *differenskvoten*. Märk att talet h i differenskvoten ovan inte nödvendigtvis är ett positivt tal. En viktig poäng är att gränsvärdet $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ när $h\to 0$ för positiva h blir samma gränsvärde när $h\to 0$ för negativa h.

Exempel

Ett enkelt exempel att ha i minnet är beloppfunktionen $f(x) = |x|$, vars funktiongraf uppenbarligen inte har en väldefinerad tangentlutning för $x = 0$. Beräknar vi differenskvoten i $a = 0$ får vi uttrycket

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h| - |h|}{h},$$

som blir $+1$ om $h > 0$, och -1 om $h < 0$.

Sats 4.1 (Produktregeln). *Om $f(x)$ och $g(x)$ är deriverbara är också produkten $h(x) = f(x)g(x)$ deriverbar med derivata*

$$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Läskoll 4.3.1. *Använd produktregeln för att bestämma derivatan av en produkt av tre funktioner $f(x)g(x)h(x)$.*

Central differenskvot

Ibland kan dett vara lättare att hantera den *centrala differenskvoten*

$$\frac{f(a+h) - f(a-h)}{(a+h) - (a-h)} = \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}.$$

Däremot kan det hända att gränsvärdet för denna existerar utan att den vanliga differenskvoten (1) har något gränsvärde. Ett enkelt exempel på detta är när $f(x) = |x|$, dvs $f(x) = x$, för $x \geq 0$ och $f(x) = -x$ då $x < 0$. Då blir den centrala differanskvoten för $a = 0$

$$\frac{f(0+h) - f(0-h)}{(0+h) - (0-h)} = \frac{h-h}{2h} = 0$$

för alla $h > 0$, medan den vanliga differenskvoten blir -1 för negativa h och $+1$ för positiva h (se Exempel 4.3).

4.4 Derivatan av sammansättning av funktioner – kedjeregeln

Har man två funktioner $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ och $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ då kan man bilda två nya funktioner vid sammansättning. Använder man först funktionen g och sedan funktionen f får man funktionen $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som skickar ett godtycklig tal x till $h(x) = f(g(x))$. Den andra funktionen får vi genom sammansättning i omvänd ordning, och denna funktionen skickar x till $g(f(x))$.

Läskoll 4.4.1. *Betrakta funktionerna $f(x) = x^2$, och $g(x) = \sin(x)$. Beskriv de två olika funktionerna $f(g(x))$ och $g(f(x))$ du får genom sammansättning.*

Sats 4.2 (Kedjeregeln). *Om $f(x)$ och $g(x)$ är deriverbara så är sammansättningen $h(x) = f(g(x))$ deriverbar med derivata*

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Exempel

Genom att använda kedjeregeln på funktionerna $g(x)$ och $f(x) = 1/x$ kan vi beräkna derivatan av $1/g(x) = f(g(x))$ som

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = f'(g(x))g'(x) = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}$$

eftersom derivatan av $f(x) = 1/x = x^{-1}$ är $f'(x) = -1 \cdot x^{-2} = -1/x^2$. Använder vi sedan produktregeln kan vi derivera en kvot av funktioner genom *kvotregeln*.

Sats 4.3 (Kvotregeln)**.** *Om $f(x)$ och $g(x)$ är derivebara är kvoten $h(x) = f(x)/g(x)$ deriverbar där $g(x) \neq 0$, med derivata*

$$h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

Läskoll 4.4.2. *Bevisa kvotregeln genom att använda produktregeln på funktionen*

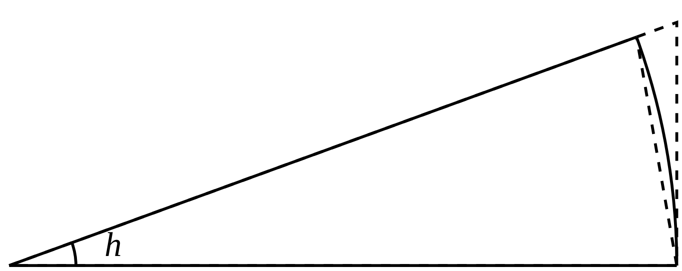
$$h(x) = f(x) \cdot (1/g(x)).$$

4.5 Derivatan av de trigonometriska funktionerna

För att se hur derivatorna av de trigonometriska funktionerna ser ut börjar vi med att derivera $\sin x$ i punkten $x = 0$. Vi intresserade av gränsvärdet av differenskvoten

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{\sin h - \sin 0}{h} = \frac{\sin h}{h}$$

då h går mot noll. Eftersom både täljare och nämnare byter tecken då h byter tecken så blir differenskvoten det samma, och vi kan anta att $h > 0$. Problemet med att bestämma gränsvärdet av differenskvoten kvarstår dock. Ett trick vi vill använda är nedanstående figur.



I figuren har vi en cirkelsektor med öppningsvinkel h och med radie 1. Cirkelsektorn innehåller triangeln med hörnen $(0,0)$, $(1,0)$ och $(\cos h, \sin h)$, men den ligger inuti triangeln med hörn $(0,0)$, $(1,0)$ och $(1, \tan h)$. Här kommer det att vara viktigt att komma ihåg att vi räknar i radianer.

Arean av cirkelsektorn är $h/2$. Vi har att arean av cirkelsektorn måste ligga inklämd mellan areorna av trianglarna, och detta ger olikheterna

$$\frac{1}{2}\sin h < \frac{h}{2} < \frac{1}{2}\tan h. \tag{2}$$

Sats 4.4. *Vi har att* $\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$.

Bevis. Den första olikheten i (2) kan skrivas om som $\frac{\sin h}{h} < 1$ genom att dela med $h/2$. Den andra olikheten kan skrivas om som $\cos h < \frac{\sin h}{h}$, genom att dela med $h/2$ och multiplicera med $\cos h$. Alltså måste vi ha vår differenskvot inklämd som

$$\cos h < \frac{\sin h}{h} < 1$$

för alla h som ligger mellan 0 och $\pi/2$. Eftersom

$$\lim_{h\to 0} \cos h = 1 \qquad \text{och} \qquad \lim_{h\to 0} 1 = 1$$

måste även gränsvärdet för $\sin h/h$ då h går mot noll finnas och vara lika med 1. □

Vi har då visat att funktionen $\sin x$ är deriverbar i punkten $x = 0$ och derivatan är $\sin' 0 = 1$.

Läskoll 4.5.1. *Använd differenskvoten*

$$\frac{\cos h - \cos 0}{h} = \frac{\cos h - 1}{h} = \frac{\cos h + 1}{\cos h + 1} \cdot \frac{\cos h - 1}{h} = \frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} = -\frac{\sin^2 h}{h(\cos h + 1)},$$

för att bestämma derivatan till cosinusfunktionen i punkten $a = 0$*: Visa att denna differenskvot är mindre än* $\sin h$ *då* $\sin h/h < 1$*. Argumentera sedan att gränsvärdet av kvoten existerar och är lika med* 0*, dvs att* $\cos'(0) = 0$*.*

Läskoll 4.5.2. *Argumentera, genom att betrakta extremvärden till funktionerna* $\cos$ *att* $\cos' 0 = 0$*.*

Vi känner nu till derivatorna av $\sin x$ och $\cos x$ i punkten $x = 0$. För att få derivatorna i andra punkter kan vi använda additionssaterna (Sats 2.4):

$$\sin(a + x) = \sin a \cos x + \cos a \sin x$$
$$\cos(a + x) = \cos a \cos x - \sin a \sin x.$$

Sats 4.5 (Derivator av de trigonometriska funktionerna)**.** *Funktionerna* $\sin x$*,* $\cos x$ *och* $\tan x$ *är deriverbara överallt där de är definierade och derivatorna ges av*

$$\sin'(x) = \cos(x), \qquad \cos'(x) = -\sin(x) \qquad \textit{och} \qquad \tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

Läskoll 4.5.3. *Använd derivatans definition och additionssatserna för att visa påståenden för sinus- och cosinusfunktionerna. Använd dessa resultat samt kvotregeln för att bevisa påståendet om derivatan för* $\tan x$*.*

Märk

Det är viktigt att observera att deriveringsformlerna för de trigonometriska funktionerna ovan enbart gäller när vi mäter vinklar i radianer. Om man insisterar på att använda grader så kommer det att dyka upp konstanter som man måste ta med sig, och som man snart finner mycket irriterande.

Läskoll 4.5.4. *Använd central differenskvot för att härleda derivatan av* $\tan x$*. (*Obs! Det fungerar för att vi redan vet att $\tan x$ är deriverbar där den är definierad.*)*

Läskoll 4.5.5. *Använd linjär approximation för att komma fram till formeln för derivatan av en kvot,* $h(x) = f(x)/g(x)$*.*

4.6 Derivatan av exponentialfunktionerna

Vi vill nu derivera exponentialfunktionen $f(x) = a^x$, där basen $a > 0$ är ett fixerad positivt tal. Sätter man sedan in definitionen får vi

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h\to 0} a^x \frac{a^h - 1}{h}.$$

Låt $C(a) = \lim_{h\to 0} \frac{a^h-1}{h}$. Det är svårt att ge en beskrivning gränsen $C(a)$, även att visa att detta blir ett tal är svårt. Men, av derivatans tolkning vet vi att tangentlutningen till punktet (x, a^x) på funktionsgrafen är precis $C(a)a^x$. Vidare så vill vi här acceptera det faktum att det finns et unik tal a sådan att $C(a) = 1$. Detta unika talet skriver vi som e.

4.7 Den naturliga basen

Talet e upptäcktes av Leonard Euler, och kan formelt definieras som gränsen

$$e := \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n \approx 2.718281.$$

Av alla baspotenser $a > 0$ kan man tycka att basen $a = 10$ är den mest naturliga. Men, från ett differentialteoretisk perspektiv är talet e det naturliga valet då vi har att

$$(e^x)' = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x.$$

När vi deriverar en exponentialfunktion a^x vill konstanten $C(a)$ dyka upp. För valet $a = e$ kommer denna konstant $C(e) = 1$, vilket ger att derivering och integrering med den naturliga basen blir enklare att uföra korrekt.

Inversfunktionen till funktionen e^x kallas den *naturliga* logaritmen och skrivs $\ln$. Vi har alltså följande samband

$$e^{\ln(x)} = x \quad \text{och} \quad \ln e^y = y$$

för alla tal x, och alla positiva tal $y > 0$.

Uppgifter

Övning A. 4.1. *Hitta en ekvation för tangentlinjen till funktionsgrafen* $y = x^2$ *i punkterna* $(0, 0)$ *och* $(2, 4)$.

Övning A. 4.2. *Hitta en ekvation för tangentlinjen till funktionsgrafen* $y = \cos x$ *i punkterna* $(0, 1)$ *och* $(\pi/4, \sqrt{2}/2)$.

Övning A. 4.3. *Hitta en ekvation för tangentlinjen till funktionsgrafen* $y = 3^x$ *i punkten* $(2, 9)$.

Övning A. 4.4. *Använd derivatans definition (1) för att bestämma derivatan till*

$$x^2, \quad x^n (n > 0), \quad \textit{och} \quad x^{-n}(n > 0).$$

Övning A. 4.5. *Använd derivatans definition för att visa att funktionen* $\sqrt{x^2} + x$ *ej är deriverbar för* $x = 0$.

Övning A. 4.6. *Använd lämpliga satser för att derivera*

$$\begin{array}{llllll} a) & x^4 + x^3 + x^2 + x & b) & \sin^2 x + \sin x \cos x & c) & \sin^2 x \cos x \\ e) & \sin(\cos x) & e) & \sin(x^2) & f) & \frac{\cos(x^2)}{x^2}. \end{array}$$

Övning A. 4.7. *Funktionen* $\ln$ *är deriverbar. Använd identiteten* $e^{\ln(x)} = x$ *och kedjeregeln för att bestämma derivatan till* $\ln$.

4.8 Uppgifter från kontrollskrivningar och tentamina

Övning 4.8.1. Låt $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ vara den funktion som ges av $f(x) = (2\cos x + 1)^4$, för alla reella tal x.

a) Formulera kedjeregeln och använd den för att derivera f. **(3)**

b) Bestäm maximum och minimum för funktionen f på intervallet $\pi/2 \leq x \leq 3\pi/2$. **(4)**

c) Beskriv hur vi i allmänhet finner extrempunkterna till $h = g^n$ då $g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ är en given funktion och n är ett positivt heltal. **(2)**

Övning 4.8.2. Betrakta funktionen

$$f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{e^x}.$$

a) Formulera regeln för derivering av en kvot och använd den för att beräkna derivatan av $f(x)$. Förenkla uttrycket så långt som möjligt. **(3)**

b) Skissera grafen för $f(x)$ på intervallet $0 \leq x \leq \pi$ och bestäm maximum och minimum av $f(x)$ på samma intervall. **(4)**

c) Funktionen $y = f(x)$ är lösningen till en *differentialekvation*

$$y'' + ay' + by = 0.$$

Bestäm konstanterna a och b. **(2)**

Övning 4.8.3. Betrakta funktionen $f(x) = \sin x + 2\cos^2 x$.

a) Formulera kedjeregeln och använd den för att beräkna derivatan av funktionen $f(x)$. **(3)**

b) Bestäm närmevärden till maximum och minimum för $f(x)$ på intervallet $0 \leq x \leq 2\pi$ med två gällande siffror. **(4)**

c) Bestäm exakta värden för maximum och minimum för funktionen $f(x)$. **(2)**

Övning 4.8.4. Betrakta funktionen $f(x) = x(3 - x)e^{-x/2}$.

a) Beräkna derivatan av funktionen $f(x)$. Ange noggrant vilka deriveringsregler som används. **(4)**

b) Bestäm maximum och minimum för $f(x)$ på intervallet $0 \leq x \leq 10$ och skissera grafen för $f(x)$ på samma intervall. **(5)**

Övning 4.8.5. Betrakta funktionen $f(x) = (x^2 - x)e^{2x}$.

a) Beräkna derivatan av funktionen $f(x)$. Ange noggrant vilka deriveringsregler som används. **(4)**

b) Bestäm maximum och minimum för $f(x)$ på intervallet $-1 \leq x \leq 1$ och skissera grafen för $f(x)$ på samma intervall. **(5)**

Övning 4.8.6.

a) Derivera funktionen $f(x) = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x$. (Var noggrann med att ange vilka deriveringsregler som används.) **(2)**

b) Derivera funktionen $g(x) = \cos 2x \sin 3x$. **(2)**

c) Bestäm ett värde på konstanten a så att funktionen $h(x) = e^{ax}\sin^2 x$ får ett lokalt maximum i punkten $x = \pi/3$. **(5)**

Övning 4.8.7.

a) Beräkna derivatan av funktionen

$$f(x) = \frac{\sin^2 x}{x^2}.$$

Ange noggrant vilka deriveringsregler som används och hur de används. **(3)**

b) Bestäm det största och det minsta värdet för funktionen $g(x) = 2x^3 - 3x + 2$ på intervallet $0 \leq x \leq 1$ och skissera grafen för $g(x)$ på samma intervall. Ange svaren exakt. **(4)**

c) Använd Newton-Raphsons metod med startvärde $x = 0$ för att finna ett närmevärde till den enda reella lösningen till ekvationen

$$x^3 + 3x + 1 = 0.$$

Utför två iterationer och gör en uppskattning av felet. **(2)**

Övning 4.8.8.

a) Derivera funktionen

$$f(x) = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^{2x} + e^{-2x}}.$$

Var noggrann med att ange vilka deriveringsregler som används och hur de används. **(3)**

b) Bestäm det största och det minsta värdet för funktionen

$$g(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$$

på intervallet $0 \leq x \leq 2\pi$. Skissera också grafen för funktionen på samma intervall. **(4)**

c) Härled derivatan av $\tan x$ direkt från definitionen av derivata. (Ledning: Använd att $(\sin x)/x$ går mot 1 när x går mot noll.) **(2)**

Övning 4.8.9.

a) Derivera funktionen
$$f(x) = \frac{\sin(x) - \cos(x)}{\sin(x) + \cos(x)}.$$
Var noggrann med att ange vilka deriveringsregler som används och hur de används. **(3)**

b) Bestäm det största och det minsta värdet för funktionen
$$g(x) = \frac{2 + x}{5 + x^2}$$
på intervallet $-5 \leq x \leq 5$. Skissera också grafen för funktionen på samma intervall. **(4)**

c) Visa direkt från definitionen av derivata att en exponentialfunktion, $h(x)$, uppfyller
$$h'(x) = h(x)\frac{h'(0)}{h(0)}.$$
(2)

Övning 4.8.10.

a) Beräkna derivatan av funktionen
$$f(x) = \sqrt{1 - e^{-2x}\cos(x)}$$
som är definierad för $x \geq 0$. Var noggrann med att ange vilka deriveringsregler som används och hur de används. **(3)**

b) Använd Newton-Raphsons metod för att bestämma ett närmevärde till nollstället till funktionen $f(x) = \sin(x) + x - 1$. Utför två iterationer med startvärde $x = 0$. och ange nollstället med korrekt antal gällande siffror. **(4)**

c) Härled formeln för derivatan av en produkt av två deriverbara funktioner. **(2)**

Övning 4.8.11.

a) Beräkna derivatan av funktionen
$$f(x) = \ln x \sin^2 x.$$
Var noggrann med att ange vilka deriveringsregler som används och hur de används. **(3)**

b) Beräkna maximum och minimum för funktionen
$$g(x) = \frac{2x^2 + 8}{2x + 3}$$
på intervallet $0 \leq x \leq 3$ och skissera grafen för funktionen på samma intervall. **(4)**

c) Om man behöver beräkna $\sqrt{57}$ med en miniräknare som saknar kvadratrotsfunktion kan man använda Newton-Raphsons metod. Använd den för att beräkna ett närmevärde med tre gällande siffrors noggrannhet utgående från startvärdet $x_0 = 7$. **(2)**

Övning 4.8.12.

a) Beräkna derivatan av funktionen

$$f(x) = xe^{-x^2/2}$$

och ange tydligt vilka deriveringsregler som används och hur de används. **(3)**

b) Beräkna maximum och minimum för funktionen

$$f(x) = xe^{-x^2/2}$$

på intervallet $-2 \leq x \leq 2$. Ange svaren exakt. Skissera också grafen för funktionen på samma intervall. **(4)**

c) Använd Newton-Raphsons metod för att beräkna ett närmevärde till den lösning till ekvationen

$$4 \sin x = x$$

som ligger i intervallet $0 \leq x \leq \pi$. Gör två iterationer från startvärdet $x_0 = \pi$. **(2)**

Övning 4.8.13.

a) Beräkna derivatan av funktionen

$$f(x) = e^{-\sqrt{x}} \cos(x)$$

som är definierad för $x \geq 0$. Var noggrann med att enge vilka deriveringsregler som används och hur de används. **(3)**

b) Bestäm maximum och minimum för funktionen

$$g(x) = 2x\sqrt{x} - 3x^2\sqrt{x}$$

på intervallet $0 \leq x \leq 1$. Skissera också grafen för funktionen på samma intervall. **(4)**

c) För att bestämma maximum för funktionen $h(x) = e^{-at} \sin(\omega t)$ för $t > 0$ vill man hitta det första nollstället för derivatan, $h'(x)$. En första gissning är $t = \pi/2\omega$, eftersom sinusfunktionen har sitt maxmimum i den punkten. Använd Newton-Raphsons metod för att förbättra denna gissning. **(2)**

Övning 4.8.14.

a) Beräkna derivatan av funktionen

$$f(x) = \frac{2\cos x}{1 + 2\cos^2 x}$$

ange noggrant vilka deriveringsregler som används och hur de används. **(3)**

b) Bestäm maximum och minimum för funktionen

$$g(t) = \frac{2t}{1 + 2t^2}$$

på intervallet $-1 \leq t \leq 1$ och skissera grafen för funktionen på samma intervall. **(4)**

c) Visa med hjälp av derivatans definition att $\cos x$ är deriverbar i $x = 0$ och att derivatan är lika med 0 i samma punkt. **(2)**

Övning 4.8.15.

a) Beräkna derivatan av funktionen

$$f(x) = (1 + \sin^2 x)(2 + \cos^2 x)$$

Var noggrann med att ange vilka deriveringsregler som används och hur de används. Förenkla uttrycket så långt det går **(4)**

b) Bestäm maximum och minimum för funktionen

$$g(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$$

på intervallet $0 \leq x \leq 2$. Skissera också grafen för funktionen på samma intervall. **(5)**

Övning 4.8.16.

a) Bestäm derivatan av funktionen

$$f(x) = e^{-\sqrt{x}} \tan x, \qquad 0 < x < \pi/2.$$

Ange noggrant vilka deriveringsregler som används och hur de används. **(3)**

b) Bestäm maximum och minimum för funktionen

$$g(x) = x^3 - 3x + 1$$

på intervallet $0 \leq x \leq 2$. Ange svaren på exakt form. **(3)**

c) Använd Newton-Raphsons metod för att finna ett närmevärde till den lösning till ekvationen

$$x^3 + 1 = 3x$$

som ligger i intervallet $0 \leq x \leq 1$. Börja med $x_0 = 0$ och utför två iterationer. Uppskatta noggrannheten i svaret. **(3)**

Övning 4.8.17.

a) Bestäm derviatan av funktionen

$$f(t) = \sin^3 t + 3\frac{\cos t}{\cos 3t}.$$

Ange noggrant vilka deriveringsregler som används och hur de används. **(3)**

b) Bestäm det största och minsta värde funktionen

$$g(x) = 3\sin^3 t + 4\cos^3 t$$

antar på intervallet $0 \leq t \leq \pi/3$. Ange svaret med tre gällande siffrors noggrannhet och skissera grafen för funktionen på samma intervall. **(4)**

c) Det finns en växande deriverbar funktion $f(x)$ som är definierad på intervallet $-1 \leq x \leq 1$ och som uppfyller

$$\sin(f(x)) = x$$

för alla $-1 \leq x \leq 1$. Använd kedjeregeln för att beräkna derivatan för $f(x)$. **(2)**

Övning 4.8.18.

a) Beräkna derivatan av funktionen

$$f(x) = e^{\sin x} \cos x.$$

Var noggrann med att ange vilka deriveringsregler som används och hur de används. **(3)**

b) Bestäm det största och det minsta värdet av funktionen

$$g(t) = 4\sin^3 t + 3\cos t$$

på intervallet $0 \leq t \leq \pi$ och skissera grafen för funktionen på samma intervall. **(4)**

c) Använd Newton-Raphsons metod för att bestämma ett närmevärde för den lösning till ekvationen $x^4 + 2x = 1$ som ligger i intervallet $0 \leq x \leq 1$. Börja med $x = 0$ och utför två iterationer. Uppskatta också felet i svaret. **(2)**

Övning 4.8.19.

a) Bestäm derivatan av funktionen

$$g(t) = e^{-t}\left(\sin t - \frac{1}{\cos t}\right), \qquad 0 < t < \pi/2.$$

Ange noggrant vilka deriveringsregler som används och hur de används. **(3)**

b) Bestäm maximum och minimum för funktionen

$$g(x) = 2\sin^3 x + \cos^2 x + 1$$

på intervallet $0 \leq x \leq \pi$. Ange svaren med två decimalers noggrannhet och skissera grafen för funktionen på det givna intervallet. **(4)**

c) Låt $h(x)$ vara den deriverbara funktion som uppfyller $\tan(h(x)) = x$ för alla x i intervallet $-\pi/2 < x < \pi/2$. Använd kedjeregeln för att bestämma derivatan av funktionen $h(x)$. **(2)**

Övning 4.8.20.

a) Bestäm derivatan av funktionen

$$f(x) = \frac{\sin(3x)}{\ln(x^2+4)}.$$

Ange noggrant vilka deriveringsregler som används och hur de används. **(3)**

b) Bestäm det största och det minsta värde funktionen

$$f(t) = e^{3t} - 3e^{2t} + 2$$

antar på intervallet $0 \leq t \leq \ln(3)$. Ange svaren med exakta värden och skissera grafen för funktionen på samma intervall. **(4)**

c) Bestäm exakta värden för koordinaterna för skärningspunkten mellan tangenterna till kurvan $y = e^x$ i punkterna $x = 1$ och $x = 2$. **(2)**

Övning 4.8.21.

a) Bestäm derivatan till funktionen

$$f(t) = \frac{\cos(\omega t) - \sin(\omega t)}{1+t^2},$$

där ω är en konstant. Ange noggrant vilka deriveringsregler som används och hur de används. **(3)**

b) Bestäm det största och det minsta värdet funktionen

$$g(x) = \frac{1-x}{1+x^2}$$

antar på intervallet $0 \leq x \leq 3$ och skissera grafen för funktionen på samma intervall. Ange svaren på exakt form. **(4)**

c) Använd Newton-Raphsons metod för att hitta ett närmevärde till enda reella lösningen till ekvationen $x^3 - 2x = -2$. Jämför vad som händer om man börjar med $x_1 = -2$ med vad som händer om man istället börjar med $x_1 = 0$. **(2)**

4.9 Facit

Övning 4.1 (5B1134:Modelltentamen:3).

a) $f'(x) = -8\sin x(2\cos x + 1)^3$.

b) Maximum är 1 och minimum är 0.

c) Genom att se på nollställena till $g'(x)$ och $g(x)$, samt ändpunkterna på intervallet.

Övning 4.2 (5B1134:KS:3:2003).

a) $f'(x) = 2e^{-x}\cos x$.

b) Maximum är $f(\pi/2) = e^{-\pi/2} \approx 0,21$ och minimum är $f(0) = -1$.

c) Konstanterna ges av $a = b = 2$ och $y = f(x)$ är en lösning till $y'' + 2y' + 2y = 0$.

Övning 4.3 (5B1134:Tentamen:031013:3).

a) Derivatan av $f(x)$ är $f'(x) = \cos x - 4\cos x \sin x$.

b) Maximum av $f(x)$ är $2,1$ och minimum $-1,0$, på intervallet $0 \le x \le 2\pi$.

c) De exakta värdena för maximum och minimum är $17/8$, respektive -1.

Övning 4.4 (5B1134:Tentamen:031103:3).

a) Derivatan av $f(x)$ är $f'(x) = (6 - 7x + x^2)e^{-x/2}/2$.

b) Maximum av $f(x)$ är $2e^{-1/2} \approx 1,2$ och minimum är $-18e^{-3} \approx -0,90$.

Övning 4.5 (5B1134:Tentamen:040109:3).

a) Derivatan av $f(x)$ är $f'(x) = (2x^2 - 1)e^{2x}$.

b) Maximum av $f(x)$ är $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{2})e^{-\sqrt{2}} \approx 0,29$ och minimum är $\frac{1}{2}(1 - \sqrt{2})e^{\sqrt{2}} \approx -0,85$.

Övning 4.6 (5B1134:Tentamen:040821:3).

a) Derivatan av $f(x)$ är $f'(x) = -32\cos^3 x \sin x + 16\cos x \sin x$.

b) Derivatan av $g(x)$ är $g'(x) = -2\sin 2x \sin 3x + 3\cos 2x \cos 3x$.

c) Funktionen har ett lokalt maximum i punkten $x = \pi/3$ om $a = -2/\sqrt{3}$.

Övning 4.7 (5B1134:KS3:2004).

a) Derivatan är $f'(x) = (\sin 2x)/x^2 - 2(\sin^2 x)/x^3$.

b) Funkionens största värdet är 2 och dess minsta värde är $2 - \sqrt{2}$.

c) Lösningen är $x = -0,32222$ med ett fel av storlek $4 \cdot 10^{-5}$.

Övning 4.8 (5B1134:Tentamen:041011:3).

a) Derivatan är $f'(x) = 8/(e^{2x} + e^{-2x})^2$.

b) Det största värdet är $\sqrt{3}/3$ och det minsta är $-\sqrt{3}/3$.

c) Dervatan av $\tan(x)$ är $1/\cos^2(x)$.

Övning 4.9 (5B1134:Tentamen:041030:3).

a) Derivatan är $f'(x) = 2/(1 + \sin 2x)$.

b) Det största värdet är $1/2$ och det minsta värdet är $-1/10$.

Övning 4.10 (5B1134:Tentamen:050112:3).

a) Derivatan är $f'(x) = (2\cos x + \sin x)/(2\sqrt{1 - e^{-2x}\cos x})$.

b) Nollstället är $x = 0,51$ med två gällande siffrors noggrannhet.

Övning 4.11 (5B1134:Tentamen:050829:3).

a) $f'(x) = (1/x)\sin^2 x + 2\ln x \sin x \cos x$.

b) Maximum ges av $g(3) = 26/9$ och minimum av $g(1) = 2$.

c) $x = 7,55$ är en approximation av $\sqrt{57}$ med tre gällande siffror.

Övning 4.12 (5B1134:KS3:2005).

a) $f'(x) = (1 - x^2)e^{-x^2/2}$.

b) Maximum är $f(1) = 1/\sqrt{e}$ och minimum $f(-1) = -1/\sqrt{e}$.

c) Två steg med Newton-Raphsons metod ger närmevärdet $x = 2,47$ (med tre gällande siffror).

Övning 4.13 (5B1134:Tentamen:051017:3).

a) $f'(x) = -e^{-\sqrt{x}}(\cos x/(2\sqrt{x}) + \sin x)$.

b) Maximum är $g(2/5) = 8\sqrt{10}/125$ och minimum är $g(1) = -1$.

c) Den förbättrade gissningen är $t_1 = \pi/(2\omega) + a/(a^2 - \omega^2)$.

Övning 4.14 (5B1134:Tentamen:051024:3).

a) Derivatan är $f'(x) = 2\sin x(2\cos^2 x - 1)/(1 + 2\cos^2 x)^2$.

b) Funktionens maximum är $f(1/\sqrt{2}) = \sqrt{2}/2$ och dess minimum är $f(-1/\sqrt{2}) = -\sqrt{2}/2$.

Övning 4.15 (5B1134:Tentamen:060113:3).

a) $f'(x) = 4\sin x \cos^3 x$.

b) Maximum är $f(2) = 5/3 \approx 1,67$ och minimum $f(\sqrt{2} - 1) = 2\sqrt{2} - 2 \approx 0,83$.

Övning 4.16 (5B1134:KS3:2006).

a) $f'(x) = (2\sqrt{x} - \cos^2 x \tan x)e^{-\sqrt{x}}/(2\sqrt{x}\cos^2 x)$.

b) Funktionens maximum är 3 och dess minimum är -1 på intervallet $0 \le x \le 2$.

c) Efter två iterationer får vi $x_2 = 0,3472$ som är ett närmevärde med en noggrannhet på $0,0001$.

Övning 4.17 (5B1134:Tentamen:061016:3).

a) $f'(t) = 3\sin^2 t \cos t - (3\sin t \cos 3t - 9\cos t \sin 3t)/\cos^2 3t$.

b) Funktionens maximum är $4,00$ och dess minimum är $2,40$.

c) $f'(x) = 1/\sqrt{1 - x^2}$.

Övning 4.18 (5B1134:Tentamen:070116:3).

a) $f'(x) = (\cos^2 x - \sin x)e^{\sin x}$.

b) Funktionens maximum är $4,38$ och dess minimum är $-3,00$.

c) Ett närmevärde efter två iterationer ges av $x_2 = 19/40 = 0,475$ och felet i detta c:a $4 \cdot 10^{-4}$.

Övning 4.19 (SF1620:KS3:2007).

a) $f'(t) = e^{-t}(\cos t - \sin t)(1 + 1/\cos^2 t)$.

b) Funktionens minimum är $53/27 \approx 1,96$ och dess maximum är $3 = 3,00$.

c) Vi kan beräkna derivatan till $h'(x) = 1/(1 + x^2)$.

Övning 4.20 (SF1620:Tentamen:071015:3)**.**

a) $f'(x) = (3\cos(3x)\ln(x^2 + 4) - 2x\sin(3x)/(x^2 + 4))/(\ln(x^2 + 4))^2$.

b) Funktionens mimimum är $g(\ln 2) = -2$ och funktionens maximum är $g(\ln 3) = 2$.

c) Skärningspunkten mellan tangenterna ges av av $(x, y) = (e/(e-1), e^2(e-1))$.

Övning 4.21 (SF1620:Tentamen:080119:3)**.**

a) $f'(t) = ((1-2\omega t+t^2)\sin(\omega t) - (1+2\omega t+t^2)\cos(\omega t))/(\omega(1+t^2)^2)$.

b) Funktionens största värde är $g(0) = 1$ och dess minsta är $g(1 + \sqrt{2}) = -(2 - \sqrt{2})/2$.

c) Ett närmevärde till lösningen ges av $x = -1, 769$.

5 Femte veckan — Derivator med tillämpningar

5.1 Optimering och extremvärden

Optimering handlar om att göra något så bra som möjligt under givna villkor. Ofta kan det formuleras som att man vill hitta ett största eller minsta värde för en funktion och det värde på variabeln som ger detta värde. Vi kallar detta för att söka *extremvärden* för funktioner.

Om en funktion är deriverbar och har ett lokalt maximum eller minimum måste derivatan i den punkten vara noll eftersom tangenten till grafen i den punkten måste vara horisontell. För att hitta kandidater till lokala extrempunkter till funktionen $f(x)$ kan vi lösa ekvationen

$$f'(x) = 0.$$

Om vi söker maximum eller minimum på ett intervall, $a \leq x \leq b$, måste vi också kontrollera intervallets ändpunkter, a och b, samt punkter där derivatan inte existerar. Exempelvis har funktionen $f(x) = x^2$ på intervallet $0 \leq x \leq 1$ sitt maximum i $x = 1$ utan att derivatan av funktionen är noll där. Om vi ser på funktionen $f(x) = |x| = \sqrt{x^2}$ på intervallet $-1 \leq x \leq 1$ så har den sitt minimum då $x = 0$, men funktionen är inte deriverbar i den punkten.

5.2 Numerisk ekvationslösning

När vi söker efter ett extremvärde till en funktion behöver vi lösa en ekvation av typen

$$g(x) = 0$$

där $g(x) = f'(x)$ är derivatan av den funktion $f(x)$ vi studerar. Ofta kan vi inte lösa ekvationen *analytiskt* och då behöver vi *numerisk metod* som hjälper oss att finna ett närmevärde till lösningen. Ett exempel på numerisk metod är *Newton-Raphsons metod*.

Idén till Newton-Raphsons metod är att vi approximerar funktionen med en linjär funktion med hjälp av derivatan. Det betyder att vi i närheten av punkten $x = x_0$ skriver

$$g(x) \approx g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0). \tag{3}$$

Vi försöker sedan lösa ekvationen $g(x) = 0$, vilket ger

$$g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) = 0.$$

Av detta får vi

$$x = x_0 - \frac{g(x_0)}{g'(x_0)}. \tag{4}$$

Nu är $g(x)$ enbart approximerad (3) med en linjär funktion, och därför blir (4) enbart en approximation av en lösning till ekvationen $g(x) = 0$. Vi skall nu använda den approximerade lösningen (4) för att hitta en bättre approximation till lösningen till $g(x) = 0$.

Vi tänker oss att vi vet att funktionen $g(x) = 0$ har en lösning i närheten av punkten $x = x_0$. Om x_0 är vår första gissning kan vi låta

$$x_1 = x_0 - \frac{g(x_0)}{g'(x_0)}$$

vara en förbättrad gissning. Vi kan sedan upprepa proceduren och successivt få bättre och bättre uppskattningar av den verkliga lösningen genom

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 - \frac{g(x_1)}{g'(x_1)}, \\ x_3 &= x_2 - \frac{g(x_2)}{g'(x_2)}, \\ x_4 &= x_3 - \frac{g(x_3)}{g'(x_3)}, \end{aligned}$$

och så vidare. Den korrigering vi gör i varje steg kan ses som en uppskattning av hur långt den förra approximationen låg från den verkliga lösningen.

5.3 Exempel

Vi ser på exemplet $f'(x) = g(x) = 3x^2 + 2x - 1$. Funktionen $g(x) = 3(x + 1)(x - 1/3)$ har nollställen i $x = -1$ och $x = 1/3$, men för exemplet så låtsas vi att inte veta detta. Vi har att $g(0) = -1$ och att $g(1) = 4$, och därför har funktionen ett nollställe i intervallet $(0, 4)$. Vi vill bestämma ett sådant nollställe och börjar med gissningen $x_0 = 0$. Newton-Raphson metoden ger då

$$x_1 = x_0 - \frac{g(x_0)}{g'(x_0)} = x_0 - \frac{3x_0^2 + 2x_0 - 1}{6x_0 + 2} = 0 - \frac{3 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 - 1}{6 \cdot 0 + 2} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

När vi går vidare och korrigerar x_1 får vi

$$x_2 = x_1 - \frac{g(x_1)}{g'(x_1)} = x_1 - \frac{3x_1^2 + 2x_1 - 1}{6x_1 + 2} = 0,5 - \frac{3 \cdot 0,5^2 + 2 \cdot 0,5 - 1}{6 \cdot 0,5 + 2} = \frac{7}{20} = 0,35.$$

och

$$x_3 = x_2 - \frac{g(x_2)}{g'(x_2)} = x_2 - \frac{3x_2^2 + 2x_2 - 1}{6x_2 + 2} = 0,35 - \frac{3 \cdot 0,35^2 + 2 \cdot 0,35 - 1}{6 \cdot 0,35 + 2} \approx 0,3335.$$

Felet, dvs. korrektionen i den senaste approximationen, kan vi uppskatta till

$$\Delta x \approx \frac{g(x_3)}{g'(x_3)} \approx \frac{3 \cdot 0,3335^2 + 2 \cdot 0,3335 - 1}{6 \cdot 0,3335 + 2} \approx 0,0002.$$

Eftersom vi i det här fallet känner till att den exakta lösningen är $x = 1/3$ kan vi kontrollera att det verkliga felet är

$$x_3 - 1/3 \approx 0,0002.$$

Läskoll 5.3.1. *Använd Newton-Raphson metoden för att estimera det andra nollstället till* $g(x)$.

Övning A. 5.1. *Funktionen* $g(x) = x^3 - x - 1$ *har enbart en reell rot. Använd Newton-Raphson metoden för att bestämma denna rot. Iterera algoritmen så pass länge att feluppskattningen är mindre än* $0,0001$.

6 Sjätte veckan — Integraler

6.1 Primitiva funktioner

Vi har sett tidigare att vissa funktioner, $f(x)$, har *primitiva funktioner*, dvs en funktion, $F(x)$, vars derivata $F'(x) = f(x)$. Om $F(x)$ är en primitiv funktion är $F(x) + C$ också en primitiv funktion för alla konstanter C, eftersom derivatan av en konstant alltid är noll. En primitiv funktion är inte unik, men differensen mellan två primitiva funktioner till en funktion $f(x)$, är en konstant.

Läskoll 6.1.1. *Låt $F(x)$ vara en primitiv funktion till $f(x)$, och givet två reella tal a och b. Visa att talet*

$$I = F(b) - F(a) \tag{5}$$

är oberoende av val av primitiv funktion.

6.2 Integralkalkylens Fundamentalsats

Låt $f(x)$ vara en funktion definierad på intervallet $[a, b]$. Funktionen $f(x)$ är *positiv* på intervallet $[a, b]$, om $f(x) \geq 0$ för alla $a \leq x \leq b$. Om funktionen $f(x)$ är positiv låter vi

$$\int_a^x f(x)\,dx$$

vara funktionen som skickar $a \leq x \leq b$ till talet som anger arean mellan funktionsgrafen och x-axeln, på intervallet $[a, x]$.

Funktionen $f(x)$ är negativ om $-f(x)$ är positiv. För negativa funktioner $f(x)$ definierar vi $\int_a^x f(x)\,dx$ som den negativa arean mellan funktionsgrafen och x-axeln, på intervallet $[a, x]$. Med andra ord har vi

$$\int_a^x f(x)\,dx := -\int_a^x |f(x)|\,dx.$$

För en given funktion $f(x)$ på intervallet $[a, b]$ definierar vi funktionen $\int_a^x f(x)\,dx$ som den alternerande summan av arean mellan funktionsgrafen och x-axeln. Av tekniska skäl sätter vi

$$\int_a^h f(x)\,dx := -\int_h^a f(x)\,dx \tag{6}$$

när $h < a$.

Sats 6.1 (Fundamentalsatsen)**.** *Låt $\mathrm{A}(x) := \int_a^x f(x)\,dx$ vara den alternerande summan av arean mellan funktionsgrafen till $f(x)$ och x-axelns på intervallet $[a, x]$. Vi har att funktionen $\mathrm{A}(x)$ är deriverbar, och*

$$\mathrm{A}'(x) = f(x).$$

Och om $F(x)$ är en primitiv funktion till $f(x)$ då har vi att

$$F(b) - F(a) = \mathrm{A}(b).$$

Bevis. För $h > 0$ har vi att differansen

$$\mathrm{A}(x+h) - \mathrm{A}(x) := \int_a^{x+h} f(x)\,dx - \int_a^{x+h} f(x)\,dx = \int_x^{x+h} f(x)\,dx \tag{7}$$

Av definitionen (6) gäller också likheten (7) för negativa $h < 0$. Om funktionen $f(x)$ är avtagande får vi areaolikheterna

$$f(x) \cdot h \geq \int_x^{x+h} f(x)\,dx \geq f(x+h) \cdot h.$$

Om vi nu delar med h, så får vi

$$f(x) \geq \frac{\int_x^{x+h} f(x)\,dx}{h} \geq f(x+h), \tag{8}$$

för alla positiva $h > 0$. Om funktionen är växande måste vi vända på olikheterna ovan, och om $h < 0$ så måste också olikheterna vända. I vilket fall så går funktionsvärdet $f(x+h) \to f(x)$ när $h \to 0$, och differenskvoten i (8) tvingas också att bli lika med $f(x)$. Kom ihåg nu att differenskvoten vi får vid att dela differensen (7) med h, och sän låta $h \to 0$ ger $\mathrm{A}'(x)$. Det följer av olikheterna (8) att

$$\mathrm{A}'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\int_x^{x+h} f(x)\,dx}{h} = f(x),$$

vilket visar det första påståendet. Speciellt har vi nu att

$$\mathrm{A}(b) - \mathrm{A}(a) = \mathrm{A}(b) \tag{9}$$

då funktionsvärdet $\mathrm{A}(a) = 0$. Vi har precis visat att funktionen $\mathrm{A}(x)$ är en primitiv funktion till $f(x)$, och talet (9) har vi redan sätt (Läskoll 6.1.1) är oberoende av primitiv funktion. Med andra ord $F(b) - F(a) = \mathrm{A}(b)$ för varje primitiv funktion $F(x)$ till $f(x)$. □

Talet $\int_a^b f(x)\,dx$ kallas för *integralen* av $f(x)$ från a till b. Om $F(x)$ är en primitiv funktion till $f(x)$ skriver vi ofta

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Exempel

Vi har att $F(x) = x^3/3$ är en primitiv funktion till x^2 och därmed

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}.$$

Tolkningen av detta som en areaberäkning ger att arean av området mellan x-axeln och kurvan $y = x^2$ på intervallet $0 \leq x \leq 1$ är $1/3$.

Läskoll 6.2.1. *Använd funktionsgraferna för att bestämma*

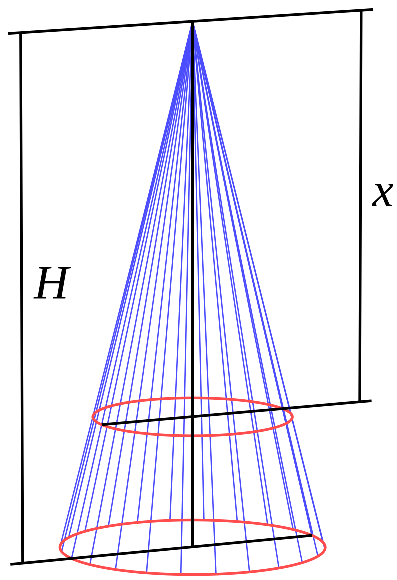
$$\int_0^{4\pi} \sin(x)\,dx \quad \textit{och} \quad \int_{-1}^{1} \tan(x)\,dx.$$

6.3 Rotationsvolymer

Vi skal se att integraler inte bara kan tolkas som arean av funktionsgrafer, men också som volym till rotationskroppar. Vi börjar med en detaljerad genomgång av ett generisk exempel.

Generisk exempel

Om vi ser på en cirkulär kon med bottenradie R och höjd H kan vi se på volymen av den delkon som har höjd x som en funktion $V(x)$.



Vi skall härleda en formel eller uttryck för funktionen $V(x)$. Vi börjar med ett uttryck för dess derivata. Av derivatans definition har vi att

$$V'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{V(x+h) - V(x)}{h}.$$

För små värden av h vill $V(x+h) - V(x)$ vara en god approximation till volymen av en skiva av konen omkring x med tjocklek h.

Läskoll 6.3.1. *Använd likformiga trianglar för att visa följande. Givet en kon av höjd H, och bottenradie R. Visa nu att konens tvärsnittsarea $A(x)$ på avstånd x från toppen är $\pi(Rx/H)^2$.*

Låt $A(x) = \pi(Rx/H)^2$ vara konens tvärsnittsarea på avstånd x från toppen . Det är lätt att inse från figur, att vi har olikheterna

$$A(x)h < V(x+h) - V(x) < A(x+h)h. \tag{10}$$

Av detta följer att

$$A(x) < \frac{V(x+h) - V(x)}{h} < A(x+h),$$

för positiva $h > 0$. När vi låter $h > 0$ krympa mot noll får vi att

$$V'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{V(x+h) - V(x)}{h} = A(x) = \pi (Rx/H)^2.$$

Vi har nu hittat ett uttryck för derivatan $V'(x)$, och kan nu hitta ett uttryck för funktionen $V(x)$. Eftersom vi vet att $V'(x) = A(x) = \pi \left(\frac{Rx}{H}\right)^2$ måste vi leta efter en primitiv funktion till x^2. Vi vet att vi får $3x^2$ när vi deriverar x^3, och därmed får vi x^2 när vi deriverar $x^3/3$. Alltså måste $V(x) = \pi \frac{R^2}{H^2} \frac{x^3}{3} + C$ för någon konstant C. Nu vet vi också att volymen till konen i $x = 0$ är lika med noll, dvs. $V(0) = 0$, vilket ger $C = 0$. Detta ger formeln

$$V(x) = \pi \frac{R^2}{3H^2} x^3,$$

for alla $0 \leq x \leq H$. Och specielt har får vi hela konens volym som

$$V(H) = \pi \frac{R^2}{H^2} \frac{H^3}{3} = \frac{\pi R^2 H}{3}.$$

Rotationsvolymer i almänhet

Om vi ser tillbaka på exemplet med konen ser vi att vi egentligen inte använt oss av att det är fråga om en cirkulär kon annat än när vi har beräknat $A(x)$. Vi kan generalisera exemplet på följande sätt. Givet en funktion $f(x)$, och ett interval $[a, b]$. För varje $a \leq x \leq b$ låter vi $V(x)$ vara rotationsvolymen till funktionsgrafen roterad om x-axeln, på intervallet $[a, x]$.

Sats 6.2. *Låt $f(x)$ vara en funktion definierad på ett invtervall $[a, b]$, och låt $V(x)$ vara rotationsvolymen till funktionsgrafen på intervallet $[a, x]$. Då har vi att*

$$V'(x) = \pi f(x)^2,$$

och

$$V(b) = \int_a^b \pi f(x)^2 \, dx.$$

Läskoll 6.3.2. *Argumentera som i det generiska exemplet ovan. Du kan stycka upp intervallet i delintervall så dan att $f(x)$ är antingen växande eller avtagande på varje interval. Du kan därmed reducera till situationen med $f(x)$ växande eller avtagande på hela intervallet. Om funktionen är växande får du olikheterna (10), och om funktionen är avtagande vänds olikheterna i (10). Visa att i båda fall blir*

$$V'(x) = A(x)$$

där $A(x)$ är tvärsnittsarean på avstånd x från toppen. Då $A(x)$ är arean av en cirkulär skiva med radie $f(x)$ får vi att $A(x) = \pi f(x)^2$, och vi har visat första påstanden i sats. Den andra påstanden följer då $V(x)$ är en primitiv funktion till $A(x)$, sådan att

$$\int_a^b A(x) \, dx = V(b) - V(a).$$

Funktionsvärdet till $V(a) = 0$ är av definitionen till $V(x)$.

Exempel

Om vi exempelvis ser ett klot som att kurvan $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ roterar kring x-axeln på intervallet $-r \leq x \leq r$ får vi

$$\begin{aligned} V &= \int_{-r}^{r} \pi(\sqrt{r^2 - x^2})^2\, dx = \int_{-r}^{r} \pi(r^2 - x^2)\, dx = \pi \left[xr^2 - \frac{x^3}{3} \right]_{-r}^{r} \\ &= \pi r^3 - \pi\frac{r^3}{3} - \pi(-r^3) + \pi\frac{(-r)^3}{3} = \pi\frac{3r^3 - r^3 + 3r^3 - r^3}{3} = \frac{4\pi r^3}{3}. \end{aligned}$$

6.4 Differenser och summor

Vi kan jämföra sambandet mellan derivata och integral med sambandet mellan differenser och summor. Om vi har en följd av tal, exempelvis

$$0, 1, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24$$

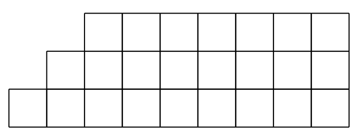
kan vi bilda *differenser*, eller *skillnader*, genom $1 - 0 = 1$, $3 - 1 = 2$, $6 - 3 = 3$, osv och får en ny följd

$$1, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3$$

Här är det klart att om vi kommer ihåg det första talet i den första följden, och sedan bara differenserna, kan vi få tillbaka hela den första följden genom att summera:

$$1 = 1, \qquad 1+2 = 3, \qquad 1+2+3 = 6, \qquad 1+2+3+3 = 9, \qquad 1+2+3+3+3 = 12, \ldots$$

Ritar vi upp det med rutor får vi



Vi kan nu tolka den första följden som antalet rutor till vänster om en viss linje.

6.5 Partiell integration

Det finns inga metoder som alltid fungerar för att finna primitiva funktioner, eller till att beräkna bestämda integraler. Däremot finns några tekniker som kan användas för att i de fall det går omforma problemet till ett enklare problem.

Ett sådant är *partiell integration*, som är ett slags omvändning av produktregeln vid derivering. Som vi vet är derivatan av en produkt, $h(x) = f(x)g(x)$, given av

$$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Om vi nu står inför att finna en primitiv funktion till en produkt $f(x)g(x)$ och redan känner en primitiv funktion, $F(x)$, till $f(x)$ kan vi försöka vända på sambandet och få

$$f(x)g(x) = F'(x)g(x) = (F(x)g(x))' - F(x)g'(x). \tag{11}$$

Eftersom vi nu ser att $F(x)g(x)$ är en primitiv funktion till den första termen kan vi finna en primitiv funktion till $f(x)g(x)$ om vi också kan finna en primitiv funktion till $F(x)g'(x)$. Vår förhoppning är att detta problem i någon mening är lättare än det ursprungliga.

Exempel

Om vi är intresserade av att beräkna

$$\int_0^\pi x \sin x \, dx$$

kan vi göra detta vid partiell integration. Först finner vi en primitiv funktion till $\sin x$, som ges av $-\cos x$. I formeln (11) låter vi $F(x) = -\cos(x)$ och $g(x) = x$. Detta ger att

$$x \sin x = (-\cos x)' x = (-x \cos x)' - (-\cos x) \cdot 1.$$

Integrerar vi nu denna likheten får vi

$$\begin{aligned} \int_0^\pi x \sin x \, dx &= [x(-\cos x)]_0^\pi - \int_0^\pi 1 \cdot (-\cos x) \, dx \\ &= \pi(-(-1)) - 0 \cdot (-1) + [\sin x]_0^\pi = \pi + 0 - 0 = \pi. \end{aligned}$$

Här blev det senare problemet enklare för att funktionen inte längre är en produkt av ett polynom med en trigonometrisk funktion utan en ren trigonometrisk funktion vars primitiva funktion vi väl kände till. Så behöver det inte alltid bli på en gång. Ibland kan man behöva upprepa proceduren flera gånger.

6.6 Variabelbyte

Vi har sett att man ibland kan använda produktregeln baklänges och få en metod för att integrera en produkt. På samma sätt kan vi ibland använda kedjeregeln baklänges för att integrera en sammansatt funktion.

Antag att vi vill utföra en integral är integranden skulle se lättare ut om vi uttryckte den oberoende variabeln x som en funktion i en annan variabel t, dvs $x = g(t)$. Vi behöver då se hur kejderegeln skulle kunna användas. Om nu $F(x)$ var en primitiv funktion till $f(x)$ skulle vi ha att

$$(F(g(t)))' = F'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t)$$

Om vi vill använda detta kan vi integrera båda sidor och får då

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) \, dx = \int_c^d (F(g(t)))' \, dt = \int_c^d f(g(t))g'(t) \, dt.$$

Märk att vi vid variabelbyte fick byta integrander, från $\int_a^b$ till $\int_c^d$. Det betyder att vi kan tänka oss att vi har gjort följande förändringar

$$\begin{cases} x &= g(t) \\ dx &= g'(t)dt \\ a &= g(c) \\ b &= g(d) \end{cases}$$

Läskoll 6.6.1. *Använd variabelbytet* $t = \sin(x)$ *för att bestämma integralen*

$$\int_0^\pi \sin^2(x)\cos(x)\,dx.$$

Exempel

För att beräkna

$$\int_a^r x\sqrt{r^2 - x^2}\,dx$$

för positiva värden på a kan det vara intressant att göra variabelbytet

$$x = \sqrt{r^2 - t^2}.$$

När vi deriverar $\sqrt{r^2 - t^2}$ får vi

$$\frac{-2t}{2\sqrt{r^2 - t^2}}$$

och därmed leder variabelbytet till

$$\begin{cases} x &= g(t) = \sqrt{r^2 - t^2} \\ dx &= g'(t)\,dt = -t/\sqrt{r^2 - t^2}\,dt \\ a &= g(\sqrt{r^2 - a^2}) \\ r &= g(0) \end{cases}$$

vilket gör att

$$\begin{aligned} \int_a^r x\sqrt{r^2 - x^2}\,dx &= \int_{\sqrt{r^2-a^2}}^0 \sqrt{r^2 - t^2} \cdot t \cdot \frac{-t}{\sqrt{r^2 - t^2}}\,dt \\ &= \int_{\sqrt{r^2-a^2}}^0 -t^2\,dt = \left[-\frac{t^3}{3}\right]_{\sqrt{r^2-a^2}}^0 = \frac{1}{3}(r^2 - a^2)^{3/2}. \end{aligned}$$

Vi kan också göra variabelbytet $x = \sqrt{t}$ och får då

$$\begin{cases} x &= g(t) = \sqrt{t} \\ dx &= g'(t)\,dt = 1/(2\sqrt{t})\,dt \\ a &= g(a^2) \\ r &= g(r^2) \end{cases}$$

vilket ger

$$\begin{aligned} \int_a^r x\sqrt{r^2 - x^2}\,dx &= \int_{a^2}^{r^2} \sqrt{t}\sqrt{r^2 - t}\frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt = \int_{a^2}^{r^2} \frac{1}{2}(r^2 - t)^{1/2}\,dt \\ &= \left[\frac{1}{2}\frac{-2}{3}(r^2 - t)^{3/2}\right]_{a^2}^{r^2} = \frac{1}{3}(r^2 - a^2)^{3/2}. \end{aligned}$$

Uppgifter

Övning A. 6.1. *Bestäm primitiva funktioner till*

$$a)\quad x^n \quad (n>0) \quad b) \quad x^{-n} \quad (n>1) \quad c) \quad \sin x \quad d) \quad \cos x$$

Övning A. 6.2. *Bestäm volymen till rotationskroppen vi får vid att rotera funktionsgrafen till* $f(x)$ *omkring* x*-axeln, mellan* $0 \leq x \leq \pi/2$ *när*

$$a) \quad f(x) = x^2 \quad b) \quad f(x) = \sqrt{\sin x} \quad c) \quad f(x) = \sin x - \cos x$$

Övning A. 6.3. *Bestäm volymen till rotationskroppen vi får vid att rotera funktionsgrafen till* $f(x) = 16 - x^2$*, för positiva* x*.*

Övning A. 6.4. *Använd partiell integration för att beräkna integralerna*

$$a) \quad \int_0^1 xe^{-x}\,dx \qquad och \qquad b) \quad \int_0^1 x^2 e^{-x}\,dx.$$

Övning A. 6.5. *Använd partiell integration för att beräkna integralerna*

$$a) \quad \int_0^\pi x^2 \sin x\,dx \qquad och \qquad b) \quad \int_0^\pi x^2 \cos x\,dx.$$

Övning A. 6.6. *Använd variabelbytet* $x = \sin t$ *för att beräkna integralerna*

$$a) \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \qquad och \qquad b) \quad \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Övning A. 6.7. *Använd variabelbytet* $t = \sin x$ *för att beräkna integralerna*

$$a) \quad \int_0^{\pi/2} \cos^3 x\,dx \qquad och \qquad b) \quad \int_0^{\pi/2} \cos^5 x\,dx.$$

Övning A. 6.8. *Använd variabelbytet* $t = e^x$ *för att beräkna integralen*

$$\int_0^{\pi/2} \frac{e^x}{1+e^x}\,dx.$$

6.7 Uppgifter från kontrollskrivningar och tentamina

Övning 6.7.1.

a) Bestäm arean av det område som ligger mellan graferna för funktionerna $f(x) = \cos x$ och $g(x) = 1/2$ på intervallet $[0, 2\pi]$. **(4)**

b) Bestäm ett uttryck för motsvarande area om vi byter ut funktionen $g(x) = 1/2$ mot $g(x) = \cos a$, där a är en konstant med $0 \leq a \leq \pi$. **(3)**

c) Vilka värden på a ger den största, respektive minsta arean mellan graferna? **(2)**

Övning 6.7.2.

a) Bestäm arean av området mellan graferna för funktionerna $f(x) = \cos x$ och $g(x) = \sin 2x$ på intervallet $0 \leq x \leq \pi/2$. **(4)**

b) Kurvan $y = x(1 - x)$ på intervallet $0 \leq x \leq 1$ roterar kring x-axeln och begränsar på så vis en tredimensionell kropp. Bestäm med hjälp av en integral volymen av denna rotationskropp. **(3)**

c) När ett område ovanför x-axeln roteras kring x-axeln kan volymen för den uppkomna rotationskroppen beskrivas som $2\pi r A$ där A är arean under grafen som roteras och r är avståndet från områdets tyngdpunkt till x-axeln. Bestäm tyngdpunktens höjd över x-axeln för det område som roteras i b). **(2)**

Övning 6.7.3.

a) Bestäm volymen av den rotationskropp som uppkommer då kurvan $y = \sqrt{1 - 2x^2}$ roterar kring x-axeln på intervallet $0 \leq x \leq 1/2$. **(3)**

b) Använd partiell integration för att beräkna integralen

$$\int_0^{\pi} x^2 \sin x dx.$$

(4)

c) Beräkna integralen

$$\int_0^{\sqrt{2}} x\sqrt{2 - x^2} dx$$

med hjälp av variabelbytet $t = 2 - x^2$. (Ledning: $2/3x\sqrt{x}$ är en primitiv funktion till $\sqrt{x}$.) **(2)**

Övning 6.7.4.

a) Beräkna integralen
$$\int_0^\pi |\sin x - \cos 2x|\,dx.$$
(4)

b) Använd först variabelbytet $t = \ln x$ och sedan partiell integration för att beräkna integralen
$$\int_1^2 (\ln x)^2 dx.$$
(5)

Övning 6.7.5.

a) Bestäm arean mellan graferna för funktionerna $f(x) = e^x$ och $g(x) = e^{2x}$ på intervallet $-1 \leq x \leq 1$. **(4)**

b) Beräkna integralen
$$\int_0^\pi x \sin x\,dx$$
med hjälp av partiell integration. **(3)**

c) Använd en trapetsmetoden med fyra delintervall för att få en numerisk approximation av samma integral som i föregående deluppgift. **(2)**

Övning 6.7.6.

a) Beräkna integralen
$$\int_0^2 f(x)^2 dx$$
där $f(x) = e^x - 1$ för alla reella x. **(3)**

b) Beräkna integralen
$$\int_0^1 (1 - x^2)e^x\,dx$$
med hjälp av partiell integration. **(3)**

c) Låt $g(t)$ vara en periodisk funktion med period T och låt a vara en reell konstant. Visa att
$$\int_{nT}^{(n+1)T} e^{at} f(t)dt = K \int_0^T e^{at} f(t)dt$$
för någon konstant K och bestäm denna konstant. **(3)**

Övning 6.7.7.

a) Polynomet $p(x) = 1 - 2x^2$ är en approximation av $\cos 2x$ som är bra för små värden på x. Beräkna integralerna

$$\int_0^{\pi/4} \cos 2x \, dx \qquad \text{och} \qquad \int_0^{\pi/4} p(x) \, dx$$

och jämför resultaten. Hur stort blir det fel man får genom att använda approximationen? **(4)**

b) Bestäm hur stort felet blir när man använder trapetsmetoden med tre delintervall för att beräkna integralen

$$\int_0^{\pi/4} \cos 2x \, dx.$$

(2)

c) Beräkna volymen av den rotationskropp som bildas då området under grafen för $f(x) = \ln(x) + 1$ roterar kring x-axeln på intervallet $1 \leq x \leq e$. **(3)**

Övning 6.7.8.

a) Kurvorna $y = e^{2x}$ och $y = e^{-2x}$ avgränsar tillsammans med linjen $x = \ln(2)$ ett område i planet. Beräkna arean av detta område. **(3)**

b) Beräkna integralen

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{2 + \cos x} \, dx.$$

med hjälp av variabelbyte. **(3)**

c) Bestäm det värde på konstanten a som minimerar

$$\int_0^{\pi} (ax - \sin x)^2 \, dx.$$

(3)

Övning 6.7.9.

a) Beräkna arean av det ändliga område som begränsas av parabeln $y = 4 - x^2$ och linjen $y = 1 + 2x$. **(3)**

b) Använd variabelbytet $x = \tan t$ för att beräkna integralen

$$\int_0^{1} \frac{1}{1 + x^2} \, dx.$$

(3)

c) Beräkna arean mellan de två kurvorna $y = \sin(x + a)$ och $y = \sin(x + b)$ på ett intervall som ligger mellan två närstående skärningspunkter. **(3)**

Övning 6.7.10.

a) Kurvan $f(x) = \sin(x)$ avgränsar tillsammans med dess tangenter i punkterna $x = 0$ och $x = \pi$ ett område i planet. Beräkna arean av detta område. **(4)**

b) Samma område roterar kring x-axeln. Beräkna volymen av den rotationskropp som bildas. **(3)**

c) Beräkna integralen

$$\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$$

med hjälp av ett variabelbyte. **(2)**

Övning 6.7.11.

a) Använd en integral för att beräkna arean av området mellan kurvan $y = x^2$ och linjen $y = 2x + 3$. **(3)**

b) Bestäm en primitiv funktion till $f(x) = x^2 \sin 2x$ genom att använda partiell integration. **(3)**

c) Bestäm volymen av den rotationskropp som bildas när kurvan $y = \tan x$ roterar kring x-axeln på intervallet $-\pi/4 \leq x \leq \pi/4$. **(3)**

Övning 6.7.12.

a) Beräkna arean av området som begränsas av de två kurvorna $y = x$ och $y = x^3$ på intervallet $-1 \leq x \leq 1$. **(3)**

b) Använd trapetsmetoden för att bestämma ett närmevärde till integralen

$$\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Använd fyra delintervall och ange svaret med två decimaler. **(3)**

c) Använd variabelbytet $t = x^2$ för att beräkna ett exakt värde för integralen

$$\int_0^2 xe^{-x^2/2}\,dx.$$

(3)

Övning 6.7.13.

a) Beräkna arean av området mellan kurvorna $y = 2x^2 + x - 5$ och $y = x^2 + x - 1$ på intervallet $0 \leq x \leq 3$. **(3)**

b) Beräkna integralen
$$\int_0^{\pi/2} (\sin 2x - \cos 3x)\, dx.$$
(2)

c) Beräkna volymen av den rotationskropp som bildas när kurvan
$$y = \sqrt{x} \cos x$$
roterar kring x-axeln på intervallet $0 \leq x \leq \pi$. (*Ledning:* Använd partiell integration och formeln för cosinus av dubbla vinkeln.) **(4)**

Övning 6.7.14.

a) Beräkna arean mellan kurvorna $y = e^{2x}$ och $y = e^{-3x}$ på intervallet $-1 \leq x \leq 1$. **(3)**

b) Använd ett variabelbyte för att beräkna integralen
$$\int_0^1 \frac{2t}{1 + 4t^2}\, dt.$$
(3)

c) Bestäm konstanter a och b så att $e^{-2x}(a \cos x + b \sin x)$ blir en primitiv funktion till $e^{-2x} \cos x$ och använd detta för att beräkna integralen
$$\int_0^{\pi} e^{-2x} \cos x\, dx.$$
(3)

Övning 6.7.15.

a) Beräkna arean av området mellan kurvorna $y = \sin x$ och $y = \sin^2 x$ på intervallet $0 \leq x \leq \pi$. (Ledning: $\sin^2 x = (1 - \cos 2x)/2$.) **(3)**

b) Beräkna integralen
$$\int_0^{\pi/2} x^2 \sin x\, dx.$$
med hjälp av partiell integration. **(3)**

c) Använd trapetsmetoden med tre delintervall för att bestämma ett närmevärde till integralen
$$\int_0^{\pi/2} x^2 \sin x\, dx$$
(3)

Övning 6.7.16.

a) Beräkna arean mellan graferna för funktionerna $g(x) = \sin 2x$ och $h(x) = \cos x$ på intervallet $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$. Ange svaret på exakt form. **(4)**

b) Använd trapetsmetoden med fyra lika långa delintervall för att beräkna ett närmevärde till integralen

$$\int_{-1}^{1} e^{-x^2/2}\, dx.$$

Ange svaret med tre siffrors noggrannhet. **(2)**

c) Beräkna integralen

$$\int_{1}^{2} x^4 \ln x\, dx.$$

Ange svaret på exakt form. **(3)**

Övning 6.7.17.

a) Beräkna det exakta värdet av integralen

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (\sin x + \cos 2x)\, dx.$$

(3)

b) För att beräkna tyngdpunkten hos en balk vars tvärsnittsyta begränsas av kurvorna $y(x) = \pm f(x)$, för $a \leq x \leq b$, behöver man beräkna kvoten

$$T_x = \frac{\int_a^b f(x)x\, dx}{\int_a^b f(x)\, dx}.$$

Beräkna T_x om $f(x) = \sin x$ för $0 \leq x \leq \pi/3$. **(3)**

c) Beräkna volymen av den rotationskropp som bildas då kurvan $y = \sin x + 2\cos x$ roterar kring x-axeln på intervallet $-\pi/4 \leq x \leq \pi/4$. **(3)**

Övning 6.7.18.

a) Beräkna arean av området som avgränsas av kurvorna $y = x^4$, $y = 2x^3$ och linjerna $x = -1$ och $x = 1$. Ange svaret på exakt form. **(3)**

b) Bestäm volymen av den rotationskropp som bildas då kurvan $y = xe^{-x}$ roterar kring x-axeln på intervallet $0 \leq x \leq 2$. Ange svaret på exakt form. **(3)**

c) Bestäm ett närmevärde till integralen

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}\, dx$$

med hjälp av trapetsmetoden med fyra lika långa delintervall. Ange svaret med två decimaler. (Observera att integranden inte är definierad i punkten $x = 0$, men har ett känt gränsvärde då x går mot noll.) **(3)**

Övning 6.7.19.

a) Bestäm arean mellan graferna för funktionerna $f(x) = 1/x$ och $g(x) = 3/(x + 3)$ på intervallet $1 \leq x \leq 3$. Ange svaret som ett närmevärde med två decimalers noggrannhet. **(4)**

b) Använd variabelbytet $t = \cos x$ för att beräkna det exakta värdet av integralen

$$\int_0^{\pi} \sin^3 x \cos^4 x\, dx.$$

(3)

c) Beräkna det fel man får vid användning av trapetsmetoden med fyra delintervall för ett andragradspolynom $p(x) = ax^2 + bx + c$ på intervallet $0 \leq x \leq 3$. **(2)**

Övning 6.7.20.

a) För funktionen $f(x)$ gäller att $f'(x) = \sin(\pi x) + 1$ för alla $x \geq 0$. Bestäm det exakta värdet för $f(30)$ om $f(3) = 13$. **(3)**

b) Använd trapetsmetoden med tre lika långa delintervall för att approximera

$$\int_0^1 \sin^2 x\, dx$$

och bestäm felet genom att jämföra resultatet med det korrekta värdet. **(3)**

c) Använd partiell integration för att beräkna det exakta värdet av integralen

$$\int_0^{2\pi} e^{-2t} \sin 3t\, dt.$$

(3)

Övning 6.7.21.

a) Beräkna den sträcka en partikel har tillryggalagt från tiden $t = 4,00$ s till tiden $t = 10,0$ s om dess hastighet varierar enligt $v(t) = at - bt^2$, där $a = 20,0$ m/s^2 och $b = 2,31$ m/s^3. Ange svaret med tre värdesiffrors noggrannhet. **(3)**

b) Använd trapetsmetoden med fyra delintervall för att uppskatta integralen

$$\int_0^1 \sin^4(t)\,dt.$$

Ange svaret med tre decimalers noggrannhet. Ligger det verkliga värdet över eller under uppskattningen? **(3)**

c) Använd partiell integration för att beräkna det exakta värdet av integralen

$$\int_1^4 x^3 \ln x\,dx.$$

(3)

6.8 Facit

Övning 6.1 (5B1134:Modelltentamen:4).

a) Arean mellan graferna är $\pi/3 + 2\sqrt{3}$.

b) Uttrycket för arean är $(2\pi - 4a)\cos a + 4\sin a$.

c) Maximum är 2π och minimum är 4.

Övning 6.2 (5B1134:KS:4:2003).

a) Arean av området mellan graferna är $1/2$.

b) Rotationskroppens volym är $\pi/30$.

c) Avståndet från områdets tyngdpunkt till x-axeln är $1/10$.

Övning 6.3 (5B1134:Tentamen:031013:4).

a) Volymen är $23\pi/24$.

b) $\int_0^\pi x^2 \sin x dx = \pi^2 - 4$.

c) $\int_0^{\sqrt{2}} x\sqrt{2 - x^2} dx = 2\sqrt{2}/3$.

Övning 6.4 (5B1134:Tentamen:031103:4).

a) $\int_0^\pi |\sin x - \cos 2x| dx = 3\sqrt{3} - 2$.

b) $\int_1^2 (\ln x)^2 dx = 2(\ln 2)^2 - 4(\ln 2) + 2 \approx 0,19..$

Övning 6.5 (5B1134:Tentamen:040109:4).

a) Arean mellan kurvorna ges av $(e^2 + 1)(e - 1)^2/2e^2 \approx 1,68$.

b) $\int_0^\pi x \sin x \, dx = \pi$.

c) Trapetsmetoden ger $\pi^2(\sqrt{2} + 1)/8 \approx 2,98$.

Övning 6.6 (5B1134:Tentamen:040821:4).

a) $\int_0^2 f(x)^2 dx = (e^4 - 4e^2 + 7)/2$.

b) $\int_0^1 (1 - x^2)e^x \, dx = 1$.

c) Konstanten är $K = e^{anT}$.

Övning 6.7 (5B1134:KS4:2004).

a) Integralernas värden blir $1/2$, respektive $\pi(24 - \pi^2)/96$ och felet man får genom att använda approximationen är $(24\pi - \pi^3 - 48)/96 \approx -0,038$.

b) Felet man får genom att använda trapetsmetoden blir $(\pi(2+\sqrt{3}) - 12)/24 \approx -0,011$.

c) Rotationskroppens volym är $V = \pi(2e - 1) \approx 13,9$ volymsenheter.

Övning 6.8 (5B1134:Tentamen:041011:4).

a) Arean av området är $9/8$ areaenheter.

b) $$\int_0^\pi \frac{\sin x}{2 + \cos x} \, dx = \ln(3)$$

c) Värdet på a som minimerar integralen är $a = 3/\pi^2$.

Övning 6.9 (5B1134:Tentamen:041030:4).

a) Arean av området är $32/3$ areaenheter.

b) Integralens värde är $\pi/4$.

c) Arean av området är $4|\sin((a - b)/2)|$ $\quad (= 2\sqrt{2 - 2\cos(a - b)})$.

Övning 6.10 (5B1134:Tentamen:050112:4).

a) Arean är $(\pi^2 - 8)/4$.

b) Volymen är $\pi^2(\pi^2 - 6)/12$.

c) $\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{x}} \, dx = 2 - 2\ln 2$.

Övning 6.11 (5B1134:Tentamen:050829:4).

a) Arean mellan kurvorna är $32/3$ areaenheter.

b) $(1/4 - x^2/2)\cos 2x + (x/2)\sin 2x$ är en primitiv funktion till $x^2 \sin 2x$.

c) Rotationsvolymen är $2\pi - \pi^2/2 (\approx 1,35)$ volymnsenheter.

Övning 6.12 (5B1134:KS4:2005).

a) Arean av det området mellan kurvorna är $1/2$ (areaenheter).

b) Uppskattningen med trapetsmetoden ger $0,16$.

c) $\int_0^2 xe^{-x^2/2} \, dx = 1 - e^{-2}$.

Övning 6.13 (5B1134:Tentamen:051017:4).

a) Arean mellan kurvorna är $23/3$ areaenheter.

b) $\int_0^{\pi/2} (\sin 2x - \cos 3x) \, dx = 4/3$.

c) Volymen av rotationskroppen är $\pi^3/4$ volymsenheter.

Övning 6.14 (5B1134:Tentamen:051024:4).

a) Arean mellan kurvorna är $(e^3 + e^{-3})/3 + (e^2 + e^{-2})/2 - 5/3$ areaenheter.

b) $\int_0^1 2t/(1 + 4t^2) \, dt = (\ln 5)/4$.

c) $a = -2/5$ och $b = 1/5$ vilket leder till $\int_0^\pi e^{-2x} \cos x \, dx = 2(1 + e^{-2\pi})/5$.

Övning 6.15 (5B1134:Tentamen:060113:4).

a) Arean mellan graferna är $2 - \pi/2$ areaenheter.

b) $\int_0^{\pi/2} x^2 \sin x \, dx = \pi - 2$.

c) En approximation med tre delintevall ger $1,2$.

Övning 6.16 (5B1134:KS4:2005).

a) Arean mellan graferna är $5/2$ areaenheter.

b) Trapetsmetoden med fyra delintervall ger $\int_{-1}^1 e^{-x^2/2} \, dx \approx 1,69$.

c) $\int_1^2 x^4 \ln(x) \, dx = (160 \ln 2 - 31)/25$.

Övning 6.17 (5B1134:Tentamen:061016:4).

a) $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (\sin x + \cos 2x) \, dx = 1$.

b) Vi får $T_x = (3\sqrt{3} - \pi)/3$.

c) Rotationskroppens volym är $5\pi^2/4 + 3\pi/2$ volymsenheter.

Övning 6.18 (5B1134:Tentamen:070116:4).

a) Arean av området mellan graferna är 1 areaenhet.

b) Volymen av rotationskroppen är $\pi(1 - 13e^{-4})/4$ volymsenheter.

c) Trapetsmetoden ger närmevärdet $2,70$.

Övning 6.19 (SF1620:KS4:2007)**.**

a) Arean mellan graferna är $13\ln 2 - 8\ln 3 \approx 0,22$ areaenheter.

b) $\int_0^{\pi} \sin^3 x \cos^4 x \, dx = 4/35.$

c) Felet blir $9a/32$ om vi använder trapetsmetoden med fyra delintervall.

Övning 6.20 (SF1620:Tentamen:071015:4)**.**

a) $f(30) = 40 - 2/\pi.$

b) Trapetsmetoden ger $\int_0^1 \sin^2 x \, dx \approx 0,281$ och felet är c:a $0,008$.

c) $\int_0^{2\pi} e^{-2t} \sin(3t) \, dt = 3(1 - e^{-4\pi})/13.$

Övning 6.21 (SF1620:Tentamen:080119:4)**.**

a) Partikeln har tillryggalagt 159 m.

b) Trapetsmetoden ger närmevärdet $0,131$ som ligger över det verkliga värdet.

c) $\int_1^4 x^3 \ln(x) \, dx = 128\ln(2) - 255/16.$