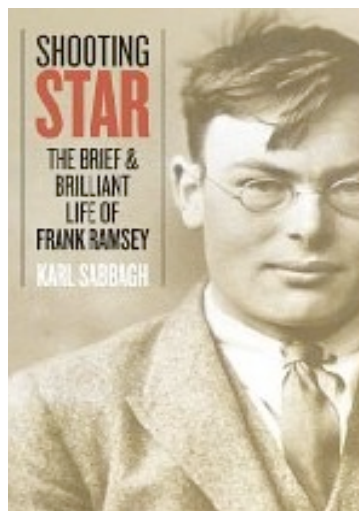


KEX-projekt: Optimal konsumtion och sparande



Matematikern, filosofen och ekonomen Frank Ramsey.

Avsikten med detta projekt är att formulera ett optimeringsproblem för sparande och konsumtion, beskriva problemets teoretiska bakgrund och numeriskt lösa problemet.

Optimal konsumtion kan formuleras och analyseras med optimal styrteori, som är en generalisering av variationskalkyl. Ett optimalt styrproblem är ett optimeringsproblem med en differentialekvation som bivillkor.

Projektbeskrivning

Frank P. Ramsey skrev 1928 uppsatsen "A Mathematical Theory of Saving" [The Economic Journal, vol 38 (1928), 543-559] där han besvarar frågan hur mycket av inkomsten som en nation ska spara, genom att lösa följande optimeringsproblem. Betrakta en ekonomi med kapitalet $X(t)$ och konsumtionen $\alpha(t)$, vid tiden t , och anta att produktionen ges av $f(X(t))$, för en given funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, så att

$$\frac{d}{dt}X(t) = f(X(t)) - \alpha(t), \quad (1)$$

vilket betyder att produktionen $f(X(t))$ är uppdelad i konsumtion $\alpha(t)$ och investering $dX(t)/dt$. Anta att $X(0) = x_0$ är ett givet begynnelsekapital. Frågan är hur mycket nationen ska spara. Hög konsumtion idag är attraktivt men leder via (1) till låg investering. Anta att samhället värderar

konsumtionen med en given nyttofunktion $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ som är strängt växande, strängt konkav och begränsad uppåt, d.v.s. $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} U(\alpha) = U_\infty \in \mathbb{R}$ och för alla $\alpha \in \mathbb{R}$ gäller $U'(\alpha) > 0$ och $U''(\alpha) < 0$. Detta antagande betyder att människor med hög konsumtion värderar en given ökad konsumtion lägre än människor med låg konsumtion. Ramsey bestämmer den konsumtionsfunktion som funktion av X , $\tilde{\alpha} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ med $\alpha(t) = \tilde{\alpha}(X(t))$, som minimerar onyttan $\tilde{U} := U_\infty - U$ över tiden

$$\int_0^\infty \tilde{U}(\alpha(t)) dt \quad (2)$$

där X och α löser (1) med givet startkapital $X(0) = x_0$.

Projektet handlar om att utvidga Ramsyes model till att studera optimal konsumtion med en ändlig tidshorisont och en produktionsfunktion som också beror explicit på tiden, t.ex. kan det modellera individers (eller företags) sparande, lånande och konsumtion vid tillfälliga inkomstbortfall eller plötsliga räntehöjningar.

Detta projekt innehåller matematisk modellering, matematisk analys, numerisk optimering och programmering.

Projektplan:

- Formulera en model som beskriver kapitalets dynamik vid tillfälliga inkomstbortfall/produktionsstopp.
- Studera teorin för optimal styrproblem.
- Skriv ett program för att numeriskt lösa det formulerade optimala styrproblemet.
- Analysera olika modeller och målfunktioner.

Referenser:

Optimal control and inverse problems,

kapitel 9 i <http://www.csc.kth.se/utbildning/kth/kurser/DN2281/stodif12/sdepde.pdf>

Frank P. Ramsey, A Mathematical Theory of Saving, The Economic Journal, vol 38 (1928), 543-559.

Orazio P. Attanasio, Frank Ramsey's a mathematical theory of saving, The Economic Journal (2015) vol 125, 269-294, <http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1111/eoj.12229/full>

Handledare:

Anders Szepessy, Institutionen för Matematik, KTH