KEX-projekt: Trafik och folkträngsel med varierande framkomlighet

Avsikten med detta projekt är att modellera och numeriskt lösa flöde av gång, cykel eller biltrafik.

Cykeltrafik.

Projektbeskrivning

Betrakta tätheten $\rho(x,t) \in \mathbb{R}$ av trafikanter (gång, cykel eller bil) vid position $x \in \mathbb{R}$ och tiden $t \in \mathbb{R}$ längs en bana. Tätheten uppfyller ofta konserveringslagen

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\big(F(x,\rho(x,t)\big) = 0, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

med givet begynnelsevillkor $\rho(\cdot,0)$, där $F(x,\rho) \in \mathbb{R}$ är flödet i position x med tätheten ρ. En enkel modell är $F\big(x,\rho(x,t)\big) = \rho(x,t)u(x,t)$, med farten $u(x,t) = v_{max}(x)\big(1-\rho(x,t)\big)$, d.v.s farten är maximalt v_{max} och avtar linjärt när tätheten ökar och vid maximal täthet 1 är farten noll.

Projektplan:

- Modellera trafik där körbanans förhållande ändras så att

  $$v_{max}(x) = \begin{cases} v_\ell, & x < 0 \\ v_r, & x > 0, \end{cases} \tag{2}$$

  med två positiva konstanter v_ℓ och v_r, vilket motsvarar en plötslig ändring i vägbanans framkomlighet från den maximal farten v_ℓ till v_r.
- Lösningen ρ till

  $$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\Big(\rho(x,t)\big(1-\rho(x,t)\big)\Big) = 0\,,$$

  med givet begynnelsevillkor, är inte alltid entydig. Läs om grunderna för ickelinjära konserveringslagar. Problemet kan regulariseras, så ett en entydig lösning erhålls, t.ex. genom att införa en slags friktion: låt $u(x,t) = 1-\rho(x,t)-\epsilon\frac{\partial}{\partial x}\rho(x,t)$ för en positiv konstant ϵ. Studera trafikproblemet (1) och (2) analytiskt med karakteristikor (utan friktion) och numeriskt (med friktion); först i fallet $v_\ell = v_r = 1$ och sedan när $v_\ell \neq v_r$.

Referenser:

Numerical Approximations of Conservation laws and Hamilton-Jacobi Equations, chapter 9.3.4 in `http://www.csc.kth.se/utbildning/kth/kurser/DN2281/stodif12/sdepde.pdf`

Helbing D., Traffic and related self-driven many-particle systems, Rev. Mod. Phys. 73, 10671141 (2001)

Bürger R. and Karlsen K.H., Conservation laws with discontinuous flux: a short introduction, J. Eng. Math. (2008) 60:241-247.

Handledare:

Anders Szepessy, Institutionen för Matematik, KTH