Lösningar FX-tenta SF1626 21/6-2010

1. Låt $\bar{v} = \frac{1}{|(1,2)|}(1,2) = \frac{1}{\sqrt{1+2^2}}(1,2)$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2).$$

Vi har riktningsderivatan

$$f'_{\bar{v}}(x,y) = \bar{v} \cdot \operatorname{grad} f(x,y)$$

och

$$f'_x(x,y) = y \quad , \quad f'_y(x,y) = x,$$

så

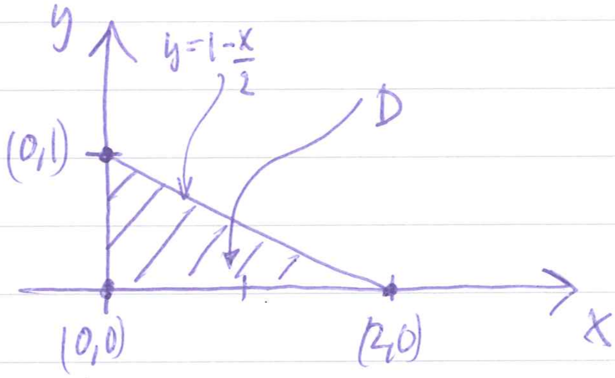
$$f'_{\bar{v}}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)\cdot(y,x)$$

$$= \frac{2x+y}{\sqrt{5}}.$$

Svar: Riktningsderivatan är

$$\frac{2x+y}{\sqrt{5}}.$$

2. Området D är triangeln i figuren



Vi har då

$$\iint_D dx\,dy = \text{arean av } D = \frac{2\cdot 1}{2} = 1.$$

Svar: Integralen är 1.

Alternativt kan vi beräkna

$$\iint_D dx\,dy = \int_0^2 \left(\int_0^{1-x/2} dy \right) dx$$

$$= \int_0^2 \left(1 - \frac{x}{2}\right) dx = \left[x - \frac{x^2}{4} \right]_0^2$$

$$= 2 - \frac{4}{4} = 1.$$

3. Låt $z = xy$. Vi har

$$f(x,y) = \frac{1}{1+z} = 1 - z + O(z^2)$$

$$= 1 - xy + O(x^2y^2).$$

Svar: Taylorpolynomet är

$1 - xy$.

Alternativt kan vi beräkna

$$f_x'(x,y) = \frac{-y}{(1+xy)^2}, \quad f_y'(x,y) = -\frac{x}{(1+xy)^2}$$

$$f_{xy}'' = -\frac{1}{(1+xy)^2} + \frac{2xy}{(1+xy)^3} = f_{yx}''(x,y)$$

$$f_{xx}'' = \frac{2y^2}{(1+xy)^3}, \quad f_{yy}''(x,y) = \frac{2x^2}{(1+xy)^3},$$

så Taylorutveckling ger

$$f(x,y) = f(0,0) + f_x'(0,0)x + f_y'(0,0)y + \frac{1}{2}\left(f_{xx}''(0,0)x^2 + 2f_{xy}''(0,0)xy + f_{yy}''(0,0)y^2\right)$$

$$+ O((x^2+y^2)^{3/2}) = 1 - xy + O((x^2+y^2)^{3/2}).$$