(1) Lösningar Fx-tenta SF1626 20100914

1. Låt $\bar{v} = \frac{(3,4)}{|(3,4)|} = \frac{(3,4)}{\sqrt{9+16}} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

vara den normerade riktningen.

Riktningsderivatan är

$$f'_{\bar{v}}(0,1) = \bar{v} \cdot \operatorname{grad} f(0,1)$$

$$= \frac{3}{5} f'_x(0,1) + \frac{4}{5} f'_y(0,1)$$

där

$$f'_x(x,y) = \frac{-1}{(x+y)^2}$$

$$f'_y(x,y) = \frac{-1}{(x+y)^2},$$

så att

$$f'_x(0,1) = = f'_y(0,1) = -1$$

och

$$f'_{\bar{v}}(0,1) = -\frac{3}{5} - \frac{4}{5} = -\frac{7}{5}.$$

(2)

2. Vi har

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^2 \left( \int_0^1 (x+y)\,dy \right) dx$$

$$= \int_0^2 \left[ xy + \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1} dx$$

$$= \int_0^2 \left(x + \frac{1}{2}\right) dx$$

$$= \left[ \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} \right]_{x=0}^{x=2} = \frac{4}{2} + \frac{2}{2} = 3.$$

(3)

3. Låt $r^2 = x^2+y^2$. Då är

$$f(x,y) = r^2 e^{-r^2}.$$

Låt $g(t) = te^{-t}$ för $t \in [0,\infty)$.

Vi söker lokalt maximum till $g$.

I en inre lokal maximipunkt krävs att

$$0 = \frac{d}{dt}(te^{-t}) = -te^{-t} + e^{-t} = (1-t)e^{-t}$$

dvs att $r^2 = t = 1$. Vi ser

också att $g'(t)$ är positiv för $t<1$

och negativ för $t>1$, så att

$t=1$ är en maximipunkt för $g(t)$.

Funktionen $f(x,y)$ har därför

ett maximivärde $f = e^{-1}$ på

cirkeln med radien $r=1$.

Speciellt är $(x,y)=(1,0)$ en maximipunkt.