8) Låt $f(x, y)$ vara en funktion som har följande Taylorutveckling kring origo:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + \mathcal{O}(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$$

Är punkten $(0, 0)$ en kritisk punkt? Ange i så fall dess karaktär.

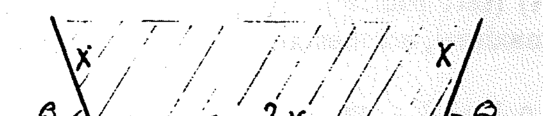
9) Beräkna ytintegralen $\iint_S \boldsymbol{F} \bullet \hat{\boldsymbol{n}}\, d\sigma$, där $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (xz, -yz, z^3)$, S är sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, och $\hat{\boldsymbol{n}}$ är den utåtriktade enhetsnormalen på S.

10) I Greens formel förekommer en enkel sluten kurva Γ av ändlig längd, som genomlöps i positiv led och utgör randen till ett område Ω. Hur lyder formeln, och vilka krav ställs på de ingående funktionerna?

---

11) $f(x, y)$ är definierad som $\frac{yx}{1-y+yx}$ i hela $D = \{0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$ utom i punkten $(0, 1)$. Kan $f(0, 1)$ definieras så att f blir kontinuerlig i hela D?

12) En ränna tillverkas genom att böja en metallplåt av bredden a meter såsom i figuren. Bestäm längden x och vinkeln θ så att genomskärningsarean blir maximal.



13) Beräkna linjeintegralen $\oint \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}$ i positiv led längs ellipsen $4x^2 + y^2 = 4$.

14) Bestäm värdet av $\frac{\partial^{10} f}{\partial x^5 \partial y^5}$ i origo, om $f(x, y) = \frac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2+1}$.

15) Avgör för vilka reella x potensserien

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{2} + \cdots \frac{1}{n}) x^n$$

konvergerar. Bestäm summan $f(x)$. (Tips: manipulera med $f(x)$ och $xf(x)$).

5B1103/2

Tentalösningar, flervariabel för D, E, F, T 970828

(1) grad $f = (2x, 6y) = (6,6)$ i P. Enhetsvektor i angivna riktningen är $\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{10}}(-1, 3)$. Sökta riktningsderivatan blir $(6,6) \bullet \hat{n} = \underline{\underline{\frac{6\sqrt{10}}{5}}}$.

Maximal ri-derivata i riktningen $(6,6)$, dvs i riktningen $\underline{\underline{(1,1)}}$. Max. värde $= \|(6,6)\| = \underline{\underline{6\sqrt{2}}}$

(2) Normalvektorer $\bar{a}$ och $\bar{b}$ är grad$(4x^2 + 9y^2 + z^2)$ och grad$(x^2 + 4y^2 - z^2)$ i P. Vi får $\bar{a} = 2 \cdot (12, 18, 5)$ och $\bar{b} = 2 \cdot (3, 8, -5)$. Tangentvektor är kryssprodukten av dem. $\bar{a} \times \bar{b} = 4(-130, 75, 42)$. $\underline{\underline{\text{SVAR}}}$: $(-130, 75, 42)$

(3) $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = (1+e^y)(-\sin x) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = e^y \cos x - (e^y + ye^y) = 0 \end{cases}$ har lösningarna $x = n\pi$, $y = \cos n\pi - 1$, n heltal

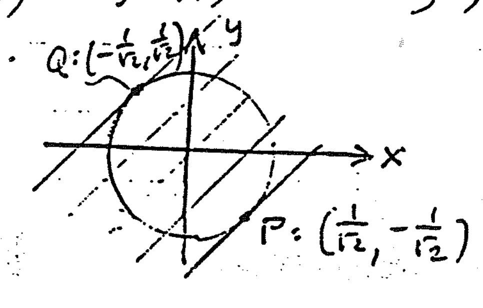
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (1+e^y)(-\cos x)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -e^y \sin x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^y(\cos x - 2 - y)$

Ger tabellen

(x,y)	A	B	C	$AC-B^2$	typ
$(2k\pi, 0)$	-2	0	-1	>0	max.
$((2k+1)\pi, -2)$	$1+e^{-2}$	0	$-e^{-2}$	<0	sadel

k heltal

(4) På enhetscirkeln $x^2 + y^2 = 1$ är $f(x,y) = g(x,y) = 1 + x - y$, som är konstant på linjerna $y = x + C$. Vi finner (se figur) max-värdet $1+\sqrt{2}$ i P och minvärdet $1 - \sqrt{2}$.



V.G. VÄND!

Som g är kontinuerlig antar g alla värden mellan dessa båda värdet. <u>SVAR</u>: Intervallet $[1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}]$.

<u>Anm.</u> Kan också lösas med vanlig metod för extremvärden med bivillkor.

(5) $$J = \frac{df}{dx} = \begin{bmatrix} 2xe^y & x^2e^y \\ e^y & xe^y \end{bmatrix}.$$

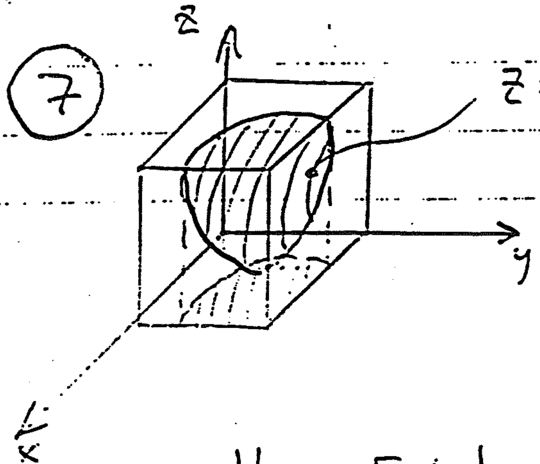
Invers: visa att systemet $\begin{cases} u = x^2e^y \\ v = xe^y \end{cases}$, $x > 0$

är entydigt lösbart för varje (x, y) i halvplanet. Vi finner att systemet $\Leftrightarrow \begin{cases} x = u/v \\ e^y = \frac{v^2}{u} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = u/v \\ y = \ln \frac{v^2}{u} \end{cases}$

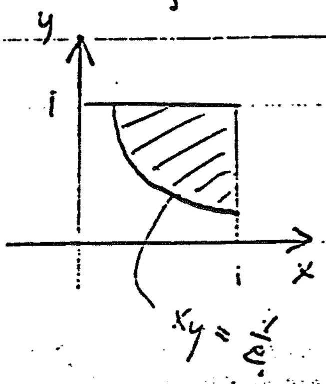
Saken är klar. [Obs att det faktum att $(\det J) \neq 0$ i hela halvplanet endast garanterar lokal invers kring varje punkt.]

(6) $$I = \int_1^2 dx \int_0^{4-x^2} \frac{dy}{x^2+y} = \int_1^2 \left[\ln(x^2+y)\right]_0^{4-x^2} dx =$$
$$= \int_1^2 (\ln 4 - \ln x^2)\,dx = \int_1^2 \ln 4\,dx - 2\int_1^2 \ln x\,dx =$$
$$= \ln 4 - 2\left([x\ln x]_1^2 - \int_1^2 dx\right) = \ln 4 - 4\ln 2 + 2 = \underline{\underline{2 - \ln 4}}$$

(7) $$z = \frac{1}{exy}$$



Projicera kroppen på xy-planet:



V.g. vänd!

Som g är kontinuerlig antar g alla värden mellan dessa båda värdet.

<u>SVAR</u>: Intervallet $[1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}]$.

<u>Anm.</u> Kan också lösas med vanlig metod för extremvärden med bivillkor.

(5) $J = \frac{df}{dx} = \begin{bmatrix} 2xe^y & x^2e^y \\ e^y & xe^y \end{bmatrix}$.

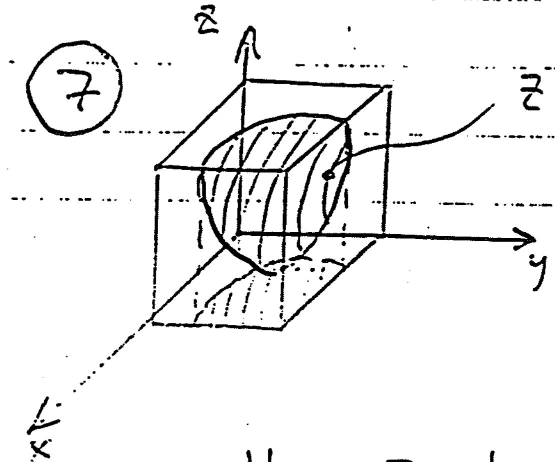
Invers: visa att systemet $\begin{cases} u = x^2e^y \\ v = xe^y \end{cases}$, $x > 0$

är entydigt lösbart för varje (x,y) i halvplanet. Vi finner att systemet $\iff \begin{cases} x = u/v \\ e^y = \frac{v^2}{u} \end{cases} \iff \begin{cases} x = u/v \\ y = \ln \frac{v^2}{u} \end{cases}$

Saken är klar. [Obs att det faktum att $(\det J) \neq 0$ i hela halvplanet endast garanterar lokal invers kring varje punkt.]

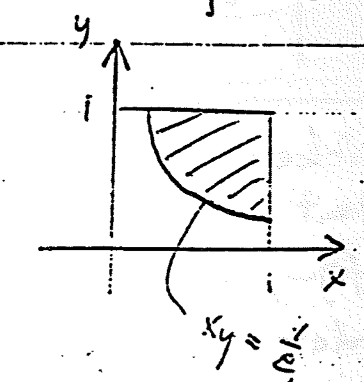
(6)
$$I = \int_1^2 dx \int_0^{4-x^2} \frac{dy}{x^2+y} = \int_1^2 \left[\ln(x^2+y)\right]_0^{4-x^2} dx =$$
$$= \int_1^2 (\ln 4 - \ln x^2)\,dx = \int_1^2 \ln 4\,dx - 2\int_1^2 \ln x\,dx =$$
$$= \ln 4 - 2\left(\left[x\ln x\right]_1^2 - \int_1^2 dx\right) = \ln 4 - 4\ln 2 + 2 = \underline{\underline{2 - \ln 4}}$$

(7)



$z = \frac{1}{exy}$

Projicera kroppen på xy-planet:



V.g. vänd!

(7 forts.) Vi får
$$V = \int_{1/e}^{1} dx \int_{1/ex}^{1} \left(1 - \frac{1}{exy}\right) dy =$$
$$= \int_{1/e}^{1} \left[y - \frac{\ln y}{ex}\right]_{1/ex}^{1} dx = \int_{1/e}^{1} \left(1 - \frac{1}{ex} + \frac{\ln\left(\frac{1}{ex}\right)}{ex}\right) dx =$$
$$= \int_{1/e}^{1} \left(1 - \frac{2}{ex} - \frac{1}{e}\cdot\frac{\ln x}{x}\right) dx = \left[\begin{array}{l}\text{subst. } \ln x = t \text{ för} \\ \text{sista termen}\end{array}\right] =$$
$$= \left[x - \frac{2}{e}\ln x - \frac{1}{2e}(\ln x)^2\right]_{1/e}^{1} = 1 - 0 - 0 - \frac{1}{e} - \frac{2}{e} + \frac{1}{2e} = \underline{\underline{1 - \frac{5}{2e}}}$$

(8) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0$; på samma sätt $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Alltså: $(0,0)$ är en <u>kritisk punkt</u>.

$f(h,k) = (h^2+k^2)\left(1 + O\sqrt{h^2+k^2}\right)$ visar att $f(h,k)$ är > 0 för tillräckligt små (h,k). Alltså $(0,0)$ <u>lokal min-punkt</u>.

(9) Gauss' sats ger $I = \iiint_K 3z^2\,dx\,dy\,dz$, där K är enhetsklotet. Sfäriska koordinater ger
$$I = 3\int_0^1 r^4\,dr \int_0^{\pi} \cos^2\theta \sin\theta\,d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \underline{\underline{\frac{4\pi}{5}}}$$

(10) Se Petermann, sid. 242.

(11) Man finner utan svårighet gränsvärdena
$$\lim_{x\to 0+} f(x,1) = 1 \quad \text{och} \quad \lim_{y\to 1-} f(0,y) = 0.$$
Följer att hur $f(0,1)$ än definieras, så blir f inte kontinuerlig i $(0,1)$. <u>SVAR</u>: Nej.

(12) Låt arean vara $f(x,\theta)$. Det räcker tydligen att studera definitionsmängden $0 \le x \le \frac{a}{2}$, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$. Då

$$f(x,\theta) = (a-2x)x\sin\theta + 2\cdot\frac{x\cos\theta \cdot x\sin\theta}{2} =$$

$$= (ax-2x^2)\sin\theta + x^2\cos\theta\sin\theta.$$ Kontinuerlig funktion på kompakt mängd ger att största värde antas.

Ränder: $x=0$ och $\theta=0$ ger $f(x,\theta)=0$. $x=\frac{a}{2}$ ger $f(x,\theta)=$

$$= \frac{a^2}{4}\cos\theta\sin\theta = \frac{a^2}{8}\sin 2\theta.$$ Ger max $\frac{a^2}{8}$ för $\theta=\frac{\pi}{4}$.

$\theta=\frac{\pi}{2}$ ger $f(x,\theta) = ax-2x^2 = -2\left(x-\frac{a}{4}\right)^2+\frac{a^2}{8}$, $0\le x\le\frac{a}{2}$.
Ger max $\frac{a^2}{8}$ för $x=\frac{a}{4}$.

Inre kritiska punkter:
$$\begin{cases} f'_x = (a-4x)\sin\theta + 2x\cos\theta\sin\theta = 0 & \ldots(1) \\ f'_\theta = (ax-2x^2)\cos\theta + x^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta) = 0 & \ldots(2) \end{cases}$$

(1) ger $\cos\theta = \frac{4x-a}{2x}$ ($\sin\theta \ne 0$, ty ej randpunkt), som sätts in i (2), vilket efter diverse räkningar ger $x=\frac{a}{3}$, $\theta=\frac{\pi}{3}$. $f\left(\frac{a}{3},\frac{\pi}{3}\right) = \frac{a^2}{4\sqrt{3}} > \frac{a^2}{8}$. SVAR: $x=\frac{a}{3}$, $\theta=\frac{\pi}{3}$

(13) Vi finner $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$,
dvs fältet $\bar{F}(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ är lokalt konservativt och vi kan byta integrationsväg till exvis enhetscirkeln, eftersom origo är den enda singulära punkten. (Petermann sid. 254).

Ger med $\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=\sin\theta \end{cases}$ $\int_0^{2\pi}\left[\left(-\frac{\sin\theta}{1}\right)\cdot(-\sin\theta) + \left(\frac{\cos\theta}{1}\cdot\cos\theta\right)\right]d\theta$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta = \underline{\underline{2\pi}}$$

(12) Låt arean vara $f(x,\theta)$. Det räcker tydligen att studera definitionsmängden $0 \le x \le \frac{a}{2}$, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$. Då är

$$f(x,\theta) = (a-2x)\, x \sin\theta + 2 \cdot \frac{x\cos\theta \cdot x\sin\theta}{2} =$$

$$= (ax-2x^2)\sin\theta + x^2\cos\theta\sin\theta.$$

Kontinuerlig funktion på kompakt mängd ger att största värde antas.

Ränder: $x=0$ och $\theta=0$ ger $f(x,\theta)=0$. $x=\frac{a}{2}$ ger $f(x,\theta) =$

$$= \frac{a^2}{4}\cos\theta\sin\theta = \frac{a^2}{8}\sin 2\theta.$$

Ger max $\frac{a^2}{8}$ för $\theta = \frac{\pi}{4}$.

$\theta = \frac{\pi}{2}$ ger $f(x,\theta) = ax - 2x^2 = -2\left(x-\frac{a}{4}\right)^2 + \frac{a^2}{8}$, $0 \le x \le \frac{a}{2}$. Ger max $\frac{a^2}{8}$ för $x = \frac{a}{4}$.

Inre kritiska punkter:

$$\begin{cases} f'_x = (a-4x)\sin\theta + 2x\cos\theta\sin\theta = 0 & \ldots(1) \\ f'_\theta = (ax-2x^2)\cos\theta + x^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 0 & \ldots(2) \end{cases}$$

(1) ger $\cos\theta = \frac{4x-a}{2x}$ ($\sin\theta \ne 0$, ty ej randpunkt), som sätts in i (2), vilket efter diverse räkningar ger $x = \frac{a}{3}$, $\theta = \frac{\pi}{3}$. $f\left(\frac{a}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{a^2}{4\sqrt{3}} > \frac{a^2}{8}$. SVAR: $x = \frac{a}{3}$, $\theta = \frac{\pi}{3}$.

(13) Vi finner

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},$$

dvs fältet $F(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ är lokalt konservativt och vi kan byta integrationsväg till exv. enhetscirkeln, eftersom origo är den enda singulära punkten. (Petermann sid. 254).

Ger med $\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}$

$$\int_0^{2\pi}\left[\left(-\frac{\sin\theta}{1}\right)\cdot(-\sin\theta) + \left(\frac{\cos\theta}{1}\cdot\cos\theta\right)\right] d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$$

(14)

$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2+1-1+xy}{x^2+y^2+1} = 1 + \frac{xy-1}{1-[-(x^2+y^2)]} =$$

$$= \left[\begin{matrix}\text{geometrisk} \\ \text{serie}\end{matrix}\right] = 1 + (xy-1)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x^2+y^2)^n.$$

Vi söker koefficienten för x^5y^5 och behöver därmed koefficienten för x^4y^4 i utvecklingen $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x^2+y^2)^n$ (x^5y^5 kan på ej dyka upp i serien). Detta är den "mellersta" termen i $(-1)^4(x^2+y^2)^4$ och alltså $\binom{4}{2}x^4y^4$.

Å andra sidan innehåller Taylorutvecklingen av f kring origo termen $\frac{1}{10!}\binom{10}{5}\frac{\partial^{10} f}{\partial x^5 \partial y^5}(0,0)\cdot x^5y^5$, som identifieras med $\binom{4}{2}x^5y^5$. Det sökta värdet blir alltså $\frac{10!\binom{4}{2}}{\binom{10}{5}}$.

SVAR: $6\cdot(5!)^2 = 86400$

(15) Div. för $|x| \ge 1$, ty termerna $\not\to 0$. Anta $|x|<1$. Vi har $\left|\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)x^n\right| \le n|x|^n$. $\sum_{n=1}^{\infty} n|x|^n$ konvergerar enl. kvotkriteriet, ty $\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)|x|^{n+1}}{n|x|^n} = |x| < 1$. Alltså konvergerar den givna serien absolut enl. jämförelsekriteriet.

Vi finner

$$x f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)x^{n+1} =$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n-1}\right)x^n.$$

Alltså är $f(x) - xf(x) =$

$$= x + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$$

enligt känd Maclaurinutveckling av $\ln(1+t)$.

SVAR: Konvergens för $|x|<1$. Summa $f(x) = \frac{\ln(1-x)}{x-1}$.