Matematiska Institutionen
KTH

Tentamensskrivning på kursen 5B1103/2 för linjerna D,E,F,T

Torsdagen den 28 augusti 1997 kl 8.00 - 13.00

Inga hjälpmedel.

Skrivningen består av 10 (1-10) uppgifter à 2 poäng och 5 (11-15) uppgifter à 3 poäng. Med 4 möjliga bonuspoäng fås en totalsummma på 39 poäng.
Betygsgränser: 16-23 p ger betyg 3, 24-30 p ger betyg 4, 31-39 p ger betyg 5.

Obs! Lösningarna skall åtföljas av förklarande text och/eller figurer. Alla räkningar skall motiveras. Förutsättningarna för använda satser skall klart anges.

---

1) Bestäm riktningsderivatan av $f(x,y) = x^2 + 3y^2$ i punkten $P : (3,1)$ i riktning mot punkten $(2,4)$ (sett från P). Ange även den riktning i vilken riktningsderivatan i P är maximal, och bestäm detta maximala värde.

2) Ellipsoiden $4x^2 + 9y^2 + z^2 = 97$ och konen $x^2 + 4y^2 - z^2 = 0$ går båda genom punkten $P : (3,2,5)$. Bestäm en tangentvektor till ytornas skärningskurva i P. (Tips: utnyttja ytornas normalvektorer).

3) Visa att funktionen $f(x,y) = (1 + e^y)\cos x - ye^y$ har oändligt många maximipunkter men inga minimipunkter.

4) Bestäm värdemängden till funktionen $f(x,y) = x^2 + x + y^2 - y$, då (x,y) ligger på enhetscirkeln.

5) Betrakta funktionen $\boldsymbol{f}(x,y) = (x^2e^y, xe^y)$ i halvplanet $x > 0$. Beräkna Jacobimatrisen till $\boldsymbol{f}$. Är $\boldsymbol{f}$ inverterbar i hela halvplanet?

6) Beräkna dubbelintegralen $\iint_D \frac{dxdy}{x^2+y}$,
där $D = \{(x,y) : 1 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 4 - x^2\}$.

7) Beräkna volymen av den del av "enhetskuben" $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$, som ges av olikheten $xyz \geq \frac{1}{e}$.

8) Låt $f(x,y)$ vara en funktion som har följande Taylorutveckling kring origo:

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + \mathcal{O}(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}$$

Är punkten $(0,0)$ en kritisk punkt? Ange i så fall dess karaktär.

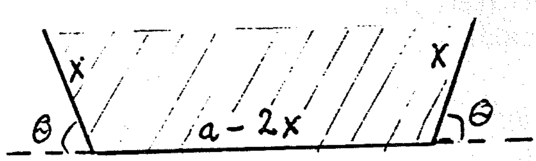
9) Beräkna ytintegralen $\iint_S \boldsymbol{F} \bullet \hat{\boldsymbol{n}}\, d\sigma$, där $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (xz, -yz, z^3)$, S är sfären $x^2+y^2+z^2 = 1$, och $\hat{\boldsymbol{n}}$ är den utåtriktade enhetsnormalen på S.

10) I Greens formel förekommer en enkel sluten kurva Γ av ändlig längd, som genomlöps i positiv led och utgör randen till ett område Ω. Hur lyder formeln, och vilka krav ställs på de ingående funktionerna?

---

11) $f(x,y)$ är definierad som $\frac{yx}{1-y+yx}$ i hela $D = \{0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$ utom i punkten $(0,1)$. Kan $f(0,1)$ definieras så att f blir kontinuerlig i hela D?

12) En ränna tillverkas genom att böja en metallplåt av bredden a meter såsom i figuren. Bestäm längden x och vinkeln θ så att genomskärningsarean blir maximal.



13) Beräkna linjeintegralen $\oint \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}$ i positiv led längs ellipsen $4x^2+y^2 = 4$.

14) Bestäm värdet av $\frac{\partial^{10} f}{\partial x^5 \partial y^5}$ i origo, om $f(x,y) = \frac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2+1}$.

15) Avgör för vilka reella x potensserien

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{1}{2} + \cdots \frac{1}{n}) x^n$$

konvergerar. Bestäm summan $f(x)$. (Tips: manipulera med $f(x)$ och $xf(x)$).