Institutionen för Matematik, KTH

Modell-Tentamen i Flervariabelanalys, SF1626:1

Tillåtet hjälpmedel är Beta Mathematics Handbook.
Tydliga lösningar med fullständiga meningar och utförliga motiveringar krävs för att undvika poängavdrag.
Uppgifterna 1-3 svarar mot kontinuerliga examinationen i kursen: godkänd lösning på KS-uppgift n ger automatiskt 3-4 poäng på tal n här, för $n = 1, 2$; godkänd projektuppgift ger 3-4 poäng på uppgift 3. För högre betyg krävs att man samlar poäng på uppgift 7-10, så kallade VG- poäng. Betygsgränser. A: 31 poäng varav minst 11 VG-poäng, B: 26 poäng varav minst 7 VG-poäng, C: 21 poäng varav minst 3 VG-poäng, D: 18 poäng, E: 16 poäng, FX 14 poäng.
Lycka till!

1a. Bestäm tangentplanet till ytan $z = x^4 - xy - 2y^2$ i punkten där $(x, y) = (1, 2)$. (2 poäng)
1b. Ge ett exempel på vad tangentplan kan användas till. (2 poäng)

2. Låt $f(x, y) = x^4 - xy + 2y^2$.
2a. Bestäm Taylorpolynomet till funktionen f av andra ordningen i punkten $(x, y) = (0, 0)$.
(2 poäng)
2b. Beskriv med hjälp av Taylorpolynom kvalitativt funktionen f i en omgivning av origo. Har f ett extremvärde i origo?
(2 poäng)

3. Funktionen $f(x, y)$ är kontinuerligt deriverbar i $\mathbb{R}^2$ och löser differentialekvationen

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) - 3\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = 0.$$

Undersök om linjen $3x + y = 1$ är en nivåkurva till funktionen f. (4 poäng)

4. Beskriv en metod att bestämma ett närmevärde till integralen

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y)\, dxdy$$

med hjälp av en summa, där $f(x, y) = e^{-x^4 y}$. (4 poäng)

5. En partikel som påverkas av kraften $\mathbf{F}$ och rör sig längs kurvan γ uträttar arbetet $\int_\gamma \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}$. Beräkna arbetet av kraften $(x, y, z+1)$ längs kurvan $(x(t), y(t), z(t)) = (\sin t, \cos t, t)$ där $0 \leq t \leq 1$. (4 poäng)

6. Låt $D = \{(x, y)\ ;\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$. Anta att $f : D \to R$ är differentierbar och $f(\mathbf{x}) = 0$ för $\mathbf{x} \in \partial D$. Finns det en punkt $\mathbf{y}$ i det inre av D så att $\mathrm{grad} f(\mathbf{y}) = (0, 0)$? Motivera ditt svar. (4 poäng)

7. Bestäm den rektangel med störst area och axelparallella sidor som kan inskrivas i (dvs sågas ur) ellipsen

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$$

(4 poäng)

8. En stege med längden 1 står vertikalt mot en vägg. Stegens nedersta del börjar glida med konstant fart horisontellt och dess övre del rör sig vertikalt tills hela stegen är horisontell. Därefter rör sig hela stegen horisontellt med farten 1. Vad är hastigheten för stegens mittpunkt när stegen rör sig?

9. Avgör om ekvationssystemet

$$\begin{aligned} x^2 + 3y + xz &= 0 \\ x + 3xy + z &= 0 \end{aligned}$$

definierar y och z som funktioner av x i en omgivning av punkten $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. (4 poäng)

10. Härled uttrycket

$$\int\int_A \sqrt{1 + (\frac{\partial f}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2}\ dxdy$$

för arean av en yta $\{(x, y, z)\ ;\ (x, y) \in A,\ z = f(x, y)\}$ med hjälp av gränsvärde av små ytelement, för ett givet område A och en given differentierbar funktion $f : A \to \mathbf{R}$ (t.ex. $A = \{(x, y)\ ;\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$ och $f(x, y) = e^{x+y}$).