Institutionen för Matematik, KTH

Modell-Tentamen i Flervariabelanalys, SF1626:2

Tillåtet hjälpmedel är Beta Mathematics Handbook.
Tydliga lösningar med fullständiga meningar och utförliga motiveringar krävs för att undvika poängavdrag.
Uppgifterna poängsätts med fyra poäng vardera.
Uppgifterna 1-3 svarar mot kontinuerliga examinationen i kursen: godkänd lösning på KS-uppgift n ger automatiskt 3-4 poäng på tal n här, för $n = 1, 2$; godkänd projektuppgift ger 3-4 poäng på uppgift 3. För högre betyg krävs att man samlar poäng på uppgift 7-10, så kallade VG- poäng. Betygsgränser. A: 31 poäng varav minst 11 VG-poäng, B: 26 poäng varav minst 7 VG-poäng, C: 21 poäng varav minst 3 VG-poäng, D: 18 poäng, E: 16 poäng, FX 14 poäng.
Lycka till!

1. Bestäm alla tangentplan till ytan

$$3x^2 - 2xy - 2xz + 2y^2 + 2z^2 = 8$$

som är parallella med yz-planet, det vill säga vinkelräta mot x-axeln.

2. Beräkna dubbelintegralen

$$\int_0^{\pi} \Big(\int_x^{\pi} \frac{\sin y}{y} dy\Big)\ dx.$$

3. Ge exempel på en tillämpning av kurvintegralen. Skriv upp och beräkna kurvintegralen för ditt exempel.

4. Temperaturen i ett område beskrivs av funktionen $T(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2 + xz^2$ grader Celsius. En frusen fluga befinner sig i punkten $(1, 1, 1)$. Hur snabbt ökar temperaturen (uttryckt i grader per sekund) om flugan flyger med farten $1/2$ längdenhet per sekund i den riktning som ges av vektorn $(2, 1, 2)$? I vilken riktning skall den flyga för att bli varm så fort som möjligt? Ge ett bevis för detta och ange den maximal temperaturökningen.

5. Bestäm arean av den del av ytan $z = 1 - x^2 - y^2$ för vilken $z \geq 0$.

6. Bestäm alla stationära punkter till funktionen

$$f(x,y) = x^2 + ye^{x^2-y}.$$

Bestäm även deras karaktär, d.v.s. om det är lokalt maximum, minimum eller något annat.

7. (a) Låt funktionen $f(x,y)$ vara differentierbar i området $D = [0,1] \times [0,1]$. Visa:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \text{i} \quad D \implies f \text{ är en funktion av } y \text{ enbart.}$$

(b) Bestäm alla lösningar till den partiella differentialekvationen

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0 \text{ i } xy\text{-planet.}$$

8. Ge exempel på, eller förklara varför det inte finns, en reellvärd funktion av två variabler som

a) är kontinuerlig men ej partiellt deriverbar i origo,
b) är differentierbar men ej kontinuerlig i origo,
c) är partiellt deriverbar men ej kontinuerlig i origo,
d) är kontinuerlig men ej differentierbar i origo.

9. Vid tillverkningen av en rektangulär låda vill man minimera materialåtgången. Hjälp tillverkaren genom att bestämma minsta möjliga begränsningsarea hos ett rätblock med volym 10 kubikdecimeter.

10. Den partiella differentialekvationen

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + 2\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = f(x,y)$$

med lösningen $u : R^2 \to R$ kan beskriva koncentrationen av partiklar som rör sig med en given konstant hastighet $(1,2)$ och påverkas av en given källa $f : R^2 \to R$. Visa att kurvor $\big(x(t), y(t)\big)$ med tangenten $(x'(t), y'(t)) = (1,2)$ kan användas för att omformulera problemet som ordinära differentialekvationer

$$\frac{d}{dt}u\big(x(t), y(t)\big) = f\big(x(t), y(t)\big).$$