

Projektuppgift, SF1626 I

Black-Scholes ekvation

En europeisk säljoption

är ett kontrakt som ger
möjligheten att sälja en
aktie för ett fixt pris
 K vid en fix tid T

i framtiden. Värdet f

av optionen är en funktion

av nuvarande aktiepris s och

nuvarande tid t . Black-

Scholes ekvation (för $t < T$ och $S < K$)

$$\frac{\partial f}{\partial t}(s, t) + rs \frac{\partial f}{\partial s}(s, t) + \frac{\sigma^2 s^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(s, t) = rf(s, t)$$

$$f(s, T) = \max(K - s, 0)$$

beskriver hur optionsvärdet

beror på räntan $r \in (0, 1)$ och

aktiens volatilitet $\sigma \in (0, \infty)$.

Merton och Scholes fick 1997

Riksbankens "Nobelpris" för härledningen

av denna ekvation från

en precis matematisk beskrivning

av ^{en} självfinansierad riskfri

portfölj utan arbitrage och detta

bygger på den hedging som

utfärdaren (banken) genomför

för att hantera optionen. Kolla

gärna vad självfinansierad riskfri

portfölj utan arbitrage betyder.

a) Låt $r=0$. Motivera
 varför \tilde{f}_{nm} definieras

3

av

$$(*) \quad \frac{\tilde{f}_{n+1,m} - \tilde{f}_{n,m}}{\Delta t} + \frac{\sigma^2 m^2 (\Delta s)^2}{2} (\tilde{f}_{n,m+1} - 2\tilde{f}_{n,m} + \tilde{f}_{n,m-1}) = 0$$

$$\tilde{f}_{N,m} = \max(K - m\Delta s, 0)$$

approximerar ~~$f(x, t)$~~

$$f(m\Delta s, n\Delta t)$$

för heltal m och n

där $n < N$ och $N\Delta t = T$

och $0 < \Delta t$, $0 < \Delta s$.

b/ Skriv ett Matlab-

4

program som löser

Black-Scholes ekvation

med hjälp av (*).

Du behöver ange begynnelse data

$$f(S, T) = \max(K - S, 0).$$

Du behöver också reducera

S till ett ändligt intervall

$$S_1 \leq S \leq S_2.$$

Då behöver du också approximerade

värden för $f(S_1, t)$

och $f(S_2, t)$.

Motivera varför

5

$$f(0, t) = K$$

$$f(\alpha K, t) = 0$$

kan vara lämpligt för
ett stort värde på α .

Välj $K=1$, $T=1$ och
 $\sigma=1$ och bestäm
 $f(K, 0)$.

Testa hur ~~värdet~~
 ΔS , Δt och α ska
väljas för att felet
ska bli mindre än 1%.

6

Arbeta gärna i grupper
om trä och lämna
en gemensam lösning
till kursledaren
före den 11:e mars.

När r och σ är
konstanta finns en formel
för f . I det allmänare
falliet ~~med~~ varierande
 ~~r~~ där r och
 σ är givna funktioner
av s och t ~~blir~~
finns ingen formel och
numeriska metoder är enda valet.