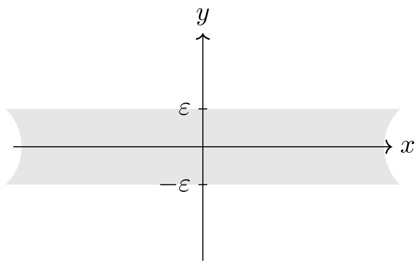
Lektion 1, Envariabelanalys den 8 september 1999

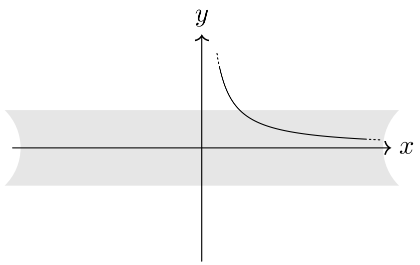
Visa med gränsvärdesdefinitionen att $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

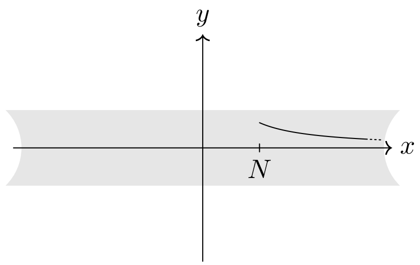
Låt oss rita ut alla punkter i talplanet som har y-koordinat nära det förmodade gränsvärdet 0. Vi får då en mängd som i figuren till höger.



Med "nära 0" menar vi att y-koordinaten ligger mellan $-\varepsilon$ och ε, där ε är något litet positivt tal. Det numeriska värdet på ε är inte så viktigt utan det viktiga är att vi fixerar något ε.

Om vi i vår figur också ritar in grafen till funktionen $f(x) = 1/x$ för $x > 0$ så får vi figuren nedan till vänster.





Vad vi kan lägga märke till är att det finns ett x-värde N så att för $x > N$ så ligger grafen helt inom den gråfärgade omgivningen till 0. Matematiskt skulle vi uttrycka detta som

$$-\varepsilon < f(x) < \varepsilon \qquad \text{om } x > N.$$

Givetvis beror värdet på N av hur liten ε är. Om ε väljs mindre än tidigare så blir vi tvungna att välja det nya N:et större. Om vi vill vara tydliga ska vi skriva $N = N(\varepsilon)$ (N beror av ε).

Huvudidéen i gränsvärdesdefinitionen är att oavsett hur litet vi väljer ε ska det alltid finnas ett $N = N(\varepsilon)$ så att grafen för $x > N$ ligger inom den gråfärgade ε-omgivningen till 0.

Om vi ska uttrycka detta i matematiska termer blir detta:

För alla $\varepsilon > 0$ måste det finnas $N = N(\varepsilon)$ så att

$$-\varepsilon < f(x) < \varepsilon \qquad \text{för alla } x > N.$$

I vårt exempel är $f(x) = 1/x$, så vi ska alltså ta fram ett N så att

$$-\varepsilon < \frac{1}{x} < \varepsilon \qquad \text{för alla } x > N. \tag{$*$}$$

Vi kan alltid anta att $N > 0$ varför den vänstra olikheten är uppfylld. Renodlar vi frågan blir den: För vilka positiva x är $1/x < \varepsilon$.
Vi löser denna olikhet genom att först multiplicera med x

$$1 < \varepsilon x,$$

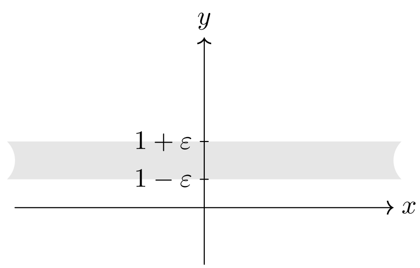
och multiplicera sedan med $1/\varepsilon$

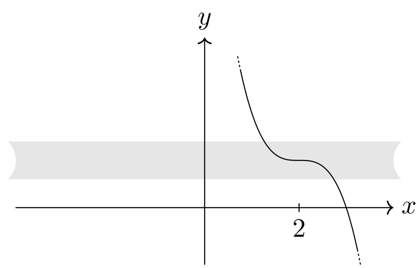
$$1/\varepsilon < x,$$

d.v.s. om vi väljer $x > 1/\varepsilon$ så är olikheten ($*$) uppfylld.
M.a.o. vi kan välja $N = 1/\varepsilon$. I och med detta har vi visat att $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$.

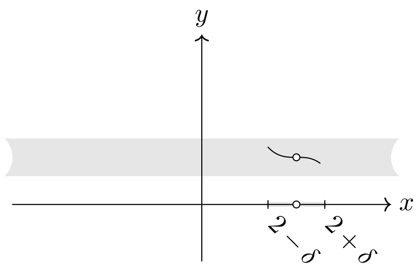
Visa med gränsvärdesdefinitionen att $\lim_{x\to 2} \bigl(1 - (x-2)^3\bigr) = 1$.

Vi gör som i det tidigare exemplet och ritar ut de punkter i talplanet som har y-koordinat i en omgivning av det förmodade gränsvärdet 1 (figuren till vänster).





I denna figur ritar vi också in grafen till funktionen $f(x) = 1-(x-2)^3$ (figuren till höger). Notera nu att i närheten av x-värdet 2 ligger grafen inom den gråfärgade ε-omgivningen till y-värdet 1. Genom att välja ett litet intervall kring x-värdet 2 kan vi få grafen helt inom den gråfärgade ε-omgivningen till 1.



Observera att när vi säger ”kring x-värdet 2” så menar vi x-värden i närheten av 2 men vi utesluter värdet 2. Vi kallar ett sådant intervall, som utesluter mittpunkten och har längd 2δ, för en punkterad δ-omgivning till 2.

Gränsvärdesdefinitionen säger nu att oavsett hur litet vi väljer ε så ska det alltid finnas $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ så att grafen ligger inom den gråfärgade ε-omgivningen till 1 då x tillhör den punkterade δ-omgivningen till 2.

Mera matematiskt lyder detta:

För alla $\varepsilon > 0$ måste det finnas $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ så att

$$1 - \varepsilon < f(x) < 1 + \varepsilon \qquad \text{för alla } x \neq 2 \text{ i intervallet } (2-\delta, 2+\delta).$$

I vårt fall ska vi undersöka för vilka x som

$$1 - \varepsilon < 1 - (x-2)^3 < 1 + \varepsilon.$$

Multiplicera med -1

$$-1 + \varepsilon > -1 + (x-2)^3 > -1 - \varepsilon.$$

Addera 1

$$\varepsilon > (x-2)^3 > -\varepsilon.$$

Tag tredje roten ur

$$\sqrt[3]{\varepsilon} > x - 2 > -\sqrt[3]{\varepsilon}.$$

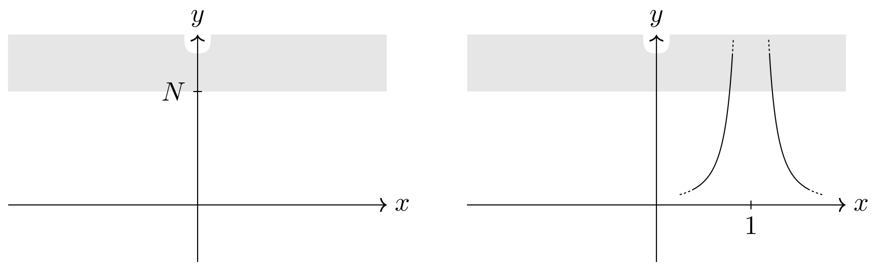
Addera 2

$$2 + \sqrt[3]{\varepsilon} > x > 2 - \sqrt[3]{\varepsilon}.$$

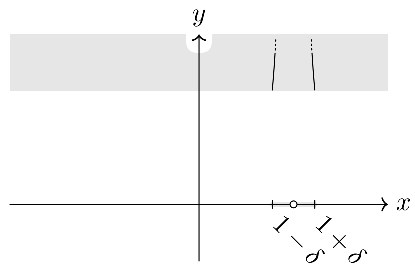
Alltså kan vi välja $\delta = \sqrt[3]{\varepsilon}$.

Visa med gränsvärdesdefinitionen att $\lim_{x \to 1} \dfrac{1}{(x-1)^2} = \infty$.

Vi ritar först ut de punkter i talplanet med y-koordinat i en omgivning av ∞ (figuren till vänster). Med ”en omgivning av ∞” menar vi alla punkter med y-koordinat större än något givet tal N. Precis som med ε är N:s numeriska värde inte så viktigt.



I vår figur ritar vi nu in grafen till funktionen $f(x) = 1/(x-1)^2$ (figuren till höger). Kring x-värdet 1 ligger grafen inom den gråfärgade omgivningen av ∞, d.v.s. det finns en punkterad δ-omgivning till 1 där grafen helt tillhör omgivningen av ∞.



Gränsvärdesdefinitionen säger nu att oavsett hur vi väljer omgivningen av ∞, d.v.s. hur stor vi väljer N, ska det alltid finnas ett $\delta = \delta(N) > 0$ så att grafen på en punkterad δ-omgivning till 1 tillhör omgivningen av ∞. Den matematiska formuleringen blir:

För alla N måste det finnas $\delta = \delta(N) > 0$ så att

$$f(x) > N \qquad \text{för alla } x \neq 1 \text{ i intervallet } (1-\delta, 1+\delta).$$

Vi ska alltså undersöka för vilka x som

$$\frac{1}{(x-1)^2} > N.$$

Multiplicera båda led med $(x-1)^2$ (som är icke-negativ) och dela med N,

$$\frac{1}{N} > (x-1)^2.$$

Ta kvadratrot

$$-\frac{1}{\sqrt{N}} < x - 1 < \frac{1}{\sqrt{N}}.$$

Addera 1

$$1 - \frac{1}{\sqrt{N}} < x < 1 + \frac{1}{\sqrt{N}}.$$

Alltså kan vi välja $\delta = \frac{1}{\sqrt{N}}$.

1.2.10 Bestäm $\displaystyle\lim_{t\to -4} \frac{t^2}{4-t}$ eller förklara varför gränsvärdet inte existerar.

Vi använder räknereglerna för gränsvärden och får

$$\lim_{t\to -4} \frac{t^2}{4-t} = \frac{\lim\limits_{t\to -4} t^2}{\lim\limits_{t\to -4} (4-t)} = \frac{(-4)^2}{4-(-4)} = 2. \qquad (*)$$

Egentligen kan vi inte vara säkra på den första likheten innan vi vet att $\lim t^2$ och $\lim(4-t)$ existerar, och att $\lim(4-t) \neq 0$. Rent logiskt borde vi alltså först räkna ut dessa gränsvärden och därefter göra uträkningen $(*)$. Man brukar i vanliga fall inte vara så strikt utan undviker gärna denna dubbelskrivning av samma uträkningar.

1.2.13 Bestäm $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x^2-6x+9}{x^2-9}$ eller förklara varför gränsvärdet inte existerar.

Om vi blint använder räknereglerna för gränsvärden får vi

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-6x+9}{x^2-9} = \frac{\lim\limits_{x\to 3}(x^2-6x+9)}{\lim\limits_{x\to 3}(x^2-9)} = \frac{0}{0}.$$

Ovanstående uträkning är inte korrekt eftersom vi får 0 i nämnaren och då gäller inte gränsvärdesregeln om kvoter.

Vi måste istället skriva om gränsvärdesuttrycket till en form där vi kan använda våra räkneregler. I detta fall faktoriserar vi täljare och nämnare, och förkortar bort den gemensamma faktorn.

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-6x+9}{x^2-9} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x\to 3} \frac{x-3}{x+3} = \frac{\lim\limits_{x\to 3}(x-3)}{\lim\limits_{x\to 3}(x+3)} = \frac{0}{6} = 0.$$

1.2.18 Bestäm $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{4+h}-2}{h}$ eller förklara varför gränsvärdet inte existerar.

Med inspektion ser vi direkt att både täljare och nämnare går mot noll då $h \to 0$. Genom att förlänga med täljarens konjugat får vi bort kvadratrotsuttrycket i täljaren i utbyte mot ett harmlöst konjugatuttryck i nämnaren.

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{4+h}-2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{4+h}-2)(\sqrt{4+h}+2)}{h(\sqrt{4+h}+2)}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{h+4-4}{h(\sqrt{4+h}+2)} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{h+4}+2} = 1/4$$

1.2.36 Bestäm $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{|3x-1|-|3x+1|}{x}$ eller förklara varför gränsvärdet inte existerar.

När $x \to 0$ går täljare och nämnare mot 0. Vi förlänger med täljarens konjugat för att få bort beloppstecknen i differensuttrycket uppe i täljaren.

$$\lim_{x\to 0}\frac{|3x-1|-|3x+1|}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\big(|3x-1|-|3x+1|\big)\big(|3x-1|+|3x+1|\big)}{x\big(|3x-1|+|3x+1|\big)}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{|3x-1|^2-|3x+1|^2}{x\big(|3x-1|+|3x+1|\big)} = \lim_{x\to 0}\frac{(9x^2-6x+1)-(9x^2+6x+1)}{x\big(|3x-1|+|3x+1|\big)}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{-12x}{x\big(|3x-1|+|3x+1|\big)} = \lim_{x\to 0}\frac{-12}{|3x-1|+|3x+1|} = -6$$

1.3.4* Beräkna $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2}{x-x^2}$.

Genom att förlänga täljare och nämnare med $1/x^2$ får vi ett uttryck där vi kan använda gränsvärdesräknereglerna.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2}{x-x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{1-2/x^2}{1/x-1} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}(1-2/x^2)}{\lim\limits_{x\to\infty}(1/x-1)} = \frac{1}{-1} = -1$$

1.3.6 Beräkna $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+\sin x}{x^2+\cos x}$.

Vi förlänger täljare och nämnare med $1/x^2$ och använder gränsvärdesräknereglerna.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+\sin x}{x^2+\cos x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{\sin x}{x^2}}{1+\frac{\cos x}{x^2}} = \frac{1+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x^2}}{1+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\cos x}{x^2}}$$

De återstående gränsvärdesuttrycken beräknar vi med instängningsprincipen.

$$\frac{-1}{x^2} \le \frac{\sin x}{x^2} \le \frac{1}{x^2} \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{\pm 1}{x^2} = 0$$
$$\frac{-1}{x^2} \le \frac{\cos x}{x^2} \le \frac{1}{x^2} \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to\infty}\frac{\cos x}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{\pm 1}{x^2} = 0$$

Därmed är

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+\sin x}{x^2+\cos x} = 1.$$

1.3.8 Beräkna $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x-1}{\sqrt{3x^2+x+1}}$.

Vi förlänger med $1/x$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{3x^2+x+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2-1/x}{\frac{1}{x}\sqrt{3x^2+x+1}} = \{x>0\}$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2-1/x}{\sqrt{\frac{3x^2+x+1}{x^2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2-1/x}{\sqrt{3+1/x+1/x^2}}.$$

För att komma vidare behöver vi följande räkneregel

$$\lim \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim f(x)}.$$

Gränsvärdet blir

$$\frac{\lim\,(2-1/x)}{\sqrt{\lim\,(3+1/x+1/x^2)}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

1.3.13 Beräkna gränsvärdet $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{1}{3-x}$.

Vi använder gränsvärdesräknereglerna

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{1}{3-x} = \frac{1}{3-\lim\limits_{x\to 3^-} x} = \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

1.3.36 Vilka är de horisontella och vertikala asymptoterna till

$$y = \frac{2x-5}{|3x+2|}.$$

De horisontella och vertikala asymptoterna bestäms av

1. Om $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = b$ då är $y=b$ en horisontell asymptot.
2. Om $\lim\limits_{x\to-\infty} y(x) = c$ då är $y=c$ en horisontell asymptot.
3. Om $\lim\limits_{x\to a} y(x) = \pm\infty$ då är $x=a$ en vertikal asymptot.

Vi undersöker dessa fall

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x-5}{3x+2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2-5/x}{3+2/x} = \dfrac{2}{3}$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x-5}{-3x-2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2-5/x}{-3-2/x} = -\dfrac{2}{3}$
3. Nämnaren blir 0 då $x=-2/3$. Täljaren är är då negativ. Alltså är $\lim\limits_{x\to-2/3} y(x) = -\infty$.

Alltså är $y=-2/3$ och $y=2/3$ horisontella asymptoter, och $x=-2/3$ är en vertikal asymptot.