Lektion 11, Envariabelanalys den 11 november 1999

5.1.2 Uttryck summan $\displaystyle\sum_{j=1}^{100} \frac{j}{j+1}$ utan summasymbolen.

Termerna är indexerade från $j = 1$ till $j = 100$ och varje term är $\frac{j}{j+1}$. Summan blir

$$\sum_{j=1}^{100} \frac{j}{j+1} = \frac{1}{1+1} + \frac{2}{2+1} + \frac{3}{3+1} + \cdots + \frac{100}{100+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \cdots + \frac{100}{101}.$$

Notera att vi med summasymbolen uttrycker summan på ett otvetydigt sätt medan summan i högerledet kräver att man gissar hur de icke utskrivna termerna ser ut.

5.1.4 Uttryck summan $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^i}{i+1}$ utan summasymbolen.

Den första termen i summan får vi genom att sätta $i = 0$ i summanden

$$\frac{(-1)^0}{0+1} = 1.$$

Den andra termen svarar mot $i = 1$,

$$\frac{(-1)^1}{1+1} = -1/2.$$

På detta sätt kan vi forsätta att skriva upp termerna. Den sista termen svarar mot $i = n - 1$ och blir

$$\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)+1} = \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Skriver vi upp summan utan summasymbolen blir den

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

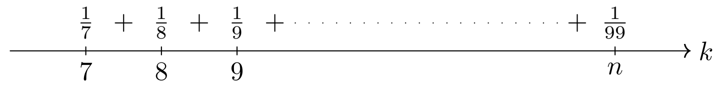
Med detta skrivsätt hoppas vi att man kan gissa sig till vilka de mellanliggande, icke utskrivna, termerna är.

5.1.12 Skriv summan

$$\frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{99}$$

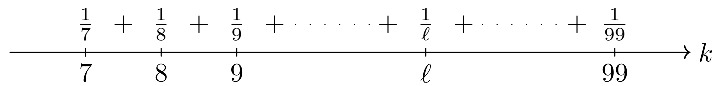
med summasymbolen.

Som ett första steg ska vi indexera summan. Vi kan egentligen välja vårt startindex till vilket heltal som helst, säg 1000000, men det är ofta praktiskt att välja ett "naturligt" startindex, t.ex. 0 eller 1. I vår summa ser vi att nämnarna verkar växa stegvis med 1 och den första termens nämnare är 7. Vi väljer därför 7 som startindex.



Vi vet från början inte hur många termer summan har, så vi kallar slutindexet för n. Nu gäller det att gissa sig till hur alla mellanliggande termer ser ut. Regelbundenheten i de första termerna antyder att termernas nämnare fortsätter att öka med ett steg i taget.

Om vi gissar att detta är det riktiga mönstret hos termerna så borde den allmänna term med index ℓ vara $1/\ell$,

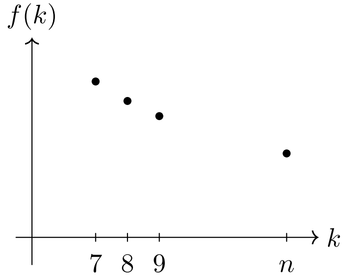


och sista termen $\frac{1}{99}$ borde ha index 99.

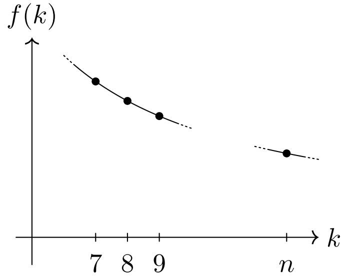
Skriver vi denna summa med summasymbolen får vi

$$\sum_{k=7}^{99} \frac{1}{k}.$$

Notera att allt detta egentligen är en gissning. Givet punkterna



så har vi gissat att summanden $f(k)$ i summan $\sum_{k=7}^{n} f(k)$ är funktionen



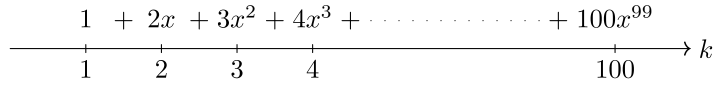
I själva verket skulle det kunna vara en annan funktionen som är det rätta svaret. Denna osäkerhet kan vi inget göra åt. Vi har gjort det enda rätta och valt den enklaste summand som passar mönstret.

5.1.14 Skriv summan

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + 100x^{99}$$

med summasymbolen.

Precis som tidigare börjar vi med att indexera summan. I detta exempel kan vi notera att koefficienterna framför x:na växer stegvis med 1. Den första termen har koefficient 1 så vi väljer 1 som startindex. Vid varje ytterligare term ökar koefficienten med 1 så vi kan gissa att sista termen $100x^{99}$ har index 100.



En allmän term med index ℓ borde, om termerna fortsätter lika regelbundet, ha formen

$$\ell \cdot x^{\text{något}}.$$

Det är inte heller så svårt att se vad exponenten borde vara. Exponenten uppvisar samma regelbundna tillväxt som indexet,

$$\ell \cdot x^{\ell-1}.$$

Med summasymbolen blir alltså summan

$$\sum_{k=1}^{100} kx^{k-1}.$$

Notera att den första termen är

$$1 \cdot x^0 = 1 \qquad \text{om } x \neq 0.$$

Om $x = 0$ så är summaformeln egentligen inte definierad och vi borde då skriva

$$1 + \sum_{k=1}^{100} kx^{k-1},$$

men eftersom detta helt klart är ett undantagsfall så brukar man underförstå vad man menar då $x = 0$.

5.1.22 Beräkna $\sum_{j=1}^{1000}(2j+3)$.

Med räknereglerna för summasymbolen kan vi dela upp summan i enklare summor,

$$\sum_{j=1}^{1000}(2j+3) = 2\sum_{j=1}^{1000} j + \sum_{j=1}^{1000} 3.$$

Den andra summan i högerledet är enkel att räkna ut. Vi adderar tusen 3:or,

$$\sum_{j=1}^{1000} 3 = 3000.$$

Den första summan i högerledet är en aritmetisk serie,

$$\sum_{j=1}^{1000} j = \frac{1001\cdot(1001-1)}{2} = 500500.$$

Alltså är

$$\sum_{j=1}^{1000}(2j+3) = 2\cdot 500500 + 3000 = 1004000.$$

5.1.24 Finn ett slutet uttryck för summan

$$\sum_{k=1}^{n-1}(2k^2-4).$$

Vi delar upp summan med räknereglerna

$$\sum_{k=1}^{n-1}(2k^2-4) = 2\sum_{k=1}^{n-1}k^2 - \sum_{k=1}^{n-1}4.$$

Summan med den kvadratiska summanden skriver vi om till kända summor,

$$\begin{aligned} 2\sum_{k=1}^{n-1}k^2 &= 2\sum_{k=0}^{n-1}k(k-1) + 2\sum_{k=0}^{n-1}k = \tfrac{2}{3}n(n-1)(n-2) + n(n-1) \\ &= \tfrac{2}{3}n(n-1)(n-\tfrac{1}{2}). \end{aligned}$$

Summan blir alltså

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1}(2k^2-4) &= \tfrac{2}{3}n(n-1)(n-\tfrac{1}{2}) - 4(n-1) \\ &= \tfrac{2}{3}n^3 - n^2 - \tfrac{11}{3}n + 4. \end{aligned}$$

Låt $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ vara en punktföljd som är jämnt fördelad i intervallet $[a,b]$ och

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Bestäm ett slutet uttryck för x_i:na.

Vi ska alltså bestämma en formel för x_i:nas x-koordinater. Eftersom punkterna ska ligga på lika avstånd ℓ från varandra måste vi ha att

$$\begin{aligned} x_1 - x_0 &= \ell, && (1)\\ x_2 - x_1 &= \ell, && (2)\\ x_3 - x_2 &= \ell, && (3)\\ &\cdots\cdots\cdots && \\ x_n - x_{n-1} &= \ell. && (n) \end{aligned}$$

Dessutom vet vi att

$$\begin{aligned} x_0 &= a, && (n+1)\\ x_n &= b. && (n+2) \end{aligned}$$

Dessa ekvationer, från (1) till $(n+2)$, bildar tillsammans ett linjärt ekvationssystem där $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ell$ är de okända.
Vi ska nu försöka lösa detta ekvationssystem. Addera $(1), (2), \ldots, (n)$,

$$\begin{array}{rl} & x_1 - x_0 = \ell \\ & x_2 - x_1 = \ell \\ & x_3 - x_2 = \ell \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + & x_n - x_{n-1} = \ell \\ \hline & x_n - x_0 = n\ell \end{array}$$

Eftersom $x_n = b$ och $x_0 = a$ är

$$b - a = n\ell \qquad \Leftrightarrow \qquad \ell = \frac{b-a}{n}.$$

Genom att nysta upp $(1), (2), \ldots, (n)$ får vi

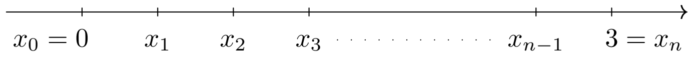
$$\begin{aligned} x_1 &= \ell + x_0 = \tfrac{b-a}{n} + a &&= a + \tfrac{b-a}{n}, \\ x_2 &= \ell + x_1 = \tfrac{b-a}{n} + a + \tfrac{b-a}{n} &&= a + 2\,\tfrac{b-a}{n}, \\ x_3 &= \ell + x_2 = \tfrac{b-a}{n} + a + 2\,\tfrac{b-a}{n} &&= a + 3\,\tfrac{b-a}{n}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\text{o.s.v.} \end{aligned}$$

Induktivt ser vi att

$$x_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n}, \qquad \text{för } i = 0, 1, \ldots, n.$$

5.2.2 Dela upp intervallet $[0,3]$ i lika stora delintervall och använd rektanglar med dessa delintervall som bas för att beräkna arean av området under $y = 2x+1$, över $y = 0$, samt mellan $x = 0$ och $x = 3$.

Vi delar först upp intervallet $[0,3]$ i n st delintervall med lika längder.

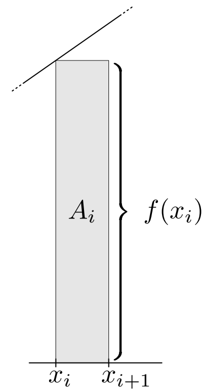


Från den förra uppgiften får vi ett uttryck för delintervallens ändpunkter,

$$x_i = 0 + i \cdot \frac{3-0}{n} = \frac{3i}{n}.$$

Om vi låter arean av delrektangeln, med (x_i, x_{i+1}) som bas, betecknas med A_i, då är

$$A_i = \text{basen} \cdot \text{höjden} = (x_{i+1} - x_i) \cdot f(x_i).$$



Eftersom vi har ett explicit uttryck för x_i och x_{i+1} så kan vi även ställa upp ett explicit uttryck för A_i,

$$\begin{aligned} A_i &= \Bigl(\frac{3(i+1)}{n} - \frac{3i}{n}\Bigr) \cdot \Bigl(2 \cdot \frac{3i}{n} + 1\Bigr) \\ &= \frac{3}{n} \cdot \Bigl(\frac{6i}{n} + 1\Bigr) = \frac{18i}{n^2} + \frac{3}{n}. \end{aligned}$$

Områdets exakta area A kan vi approximera med summan av delrektanglarnas area,

$$\begin{aligned} A &\approx \sum_{i=0}^{n-1} A_i = \sum_{i=0}^{n-1} \Bigl(\frac{18i}{n^2} + \frac{3}{n}\Bigr) \\ &= \frac{18}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} i + \frac{3}{n} \sum_{i=0}^{n-1} 1 = \frac{18}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)}{2} + \frac{3}{n} \cdot n = 9\,\frac{n-1}{n} + 3. \end{aligned}$$

Om vi låter antalet delrektanglar n öka så borde vi få en allt bättre approximation av den verkliga arean A. I gränsfallet $n \to \infty$ får vi den exakta arean,

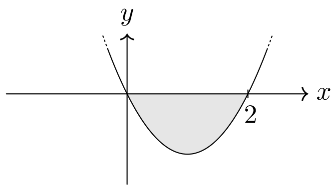
$$A = \lim_{n\to\infty} \Bigl(3 + 9\,\frac{n-1}{n}\Bigr) = 3 + 9 = 12.$$

5.2.10 Dela upp ett intervall i lika stora delintervall och använd rektanglar med dessa delintervall som bas för att beräkna arean av området över $y = x^2 - 2x$ och under $y = 0$.

Låt oss först rita upp området. Funktionen $y = x^2 - 2x$ är en typisk andragradsfunktion. Genom att kvadratkomplettera får vi att

$$y = (x-1)^2 - 1.$$

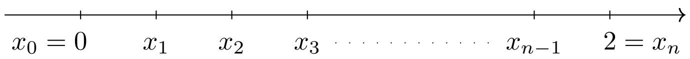
I detta uttryck ser vi direkt att minimum finns i $x = 1$ där $y = -1$ och att $y \to \infty$ då $x \to \pm\infty$. Ritar vi upp grafen har den en typisk parabelform



Vi söker arean av det gråfärgade området ovan. Området begränsas i x-led av de två x-värdena där kurvan $y = x^2 - 2x$ skär $y = 0$, d.v.s.

$$x^2 - 2x = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 0 \quad \text{eller} \quad x = 2.$$

Vi delar upp x-intervallet $[0, 2]$ i n st delintervall med lika längder.



Ett uttryck för delintervallens ändpunkter $\{x_i\}$ är

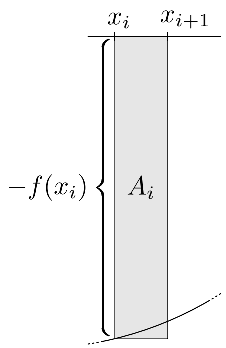
$$x_i = 0 + i \cdot \frac{2-0}{n} = \frac{2i}{n}.$$

Om vi låter A_i beteckna arean av den delrektangel med (x_i, x_{i+1}) som bas, då är

$$A_i = \text{basen} \cdot \text{höjden} = (x_{i+1} - x_i) \cdot \bigl(-f(x_i)\bigr).$$

Ett explicit uttryck för A_i är

$$\begin{aligned} A_i &= \Bigl((i+1)\frac{2}{n} - \frac{2i}{n}\Bigr) \cdot \Bigl(-\Bigl(\frac{2i}{n}\Bigr)^2 + 2\,\frac{2i}{n}\Bigr) \\ &= \frac{2}{n}\Bigl(\frac{4i}{n} - i^2\frac{4}{n^2}\Bigr). \end{aligned}$$



Områdets exakta area A approximerar vi med summan av delrektanglarnas area,

$$\begin{aligned} A \approx \sum_{i=0}^{n-1} A_i &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{2}{n} \cdot \Bigl(\frac{4i}{n} - i^2\frac{4}{n^2}\Bigr) = \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\Bigl(-i(i-1)\frac{4}{n^2} + \Bigl(\frac{4}{n} - \frac{4}{n^2}\Bigr)i\Bigr) \\ &= -\frac{8}{n^3}\sum_{i=0}^{n-1} i(i-1) + \Bigl(\frac{8}{n^2} - \frac{8}{n^3}\Bigr)\sum_{i=0}^{n-1} i \\ &= -\frac{8}{n^3}\,\frac{n(n-1)(n-2)}{3} + \Bigl(\frac{8}{n^2} - \frac{8}{n^3}\Bigr)\frac{n(n-1)}{2} = \frac{4}{3} - \frac{4}{3n^2}. \end{aligned}$$

När vi låter antalet delrektanglar $n \to \infty$ får vi den exakta arean

$$A = \lim_{n\to\infty}\Bigl(\frac{4}{3} - \frac{4}{3n^2}\Bigr) = \frac{4}{3}.$$

5.3.2 Låt P_n vara partitionen av intervallet $[0, 4]$ i n st delintervall med lika längd $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$. Beräkna $L(f, P_4)$ och $U(f, P_4)$ för $f(x) = x^2$.

Under- och översumman är

$$L(f, P_4) = \sum_{i=0}^{3} m_i \Delta x_i,$$

$$U(f, P_4) = \sum_{i=0}^{3} M_i \Delta x_i,$$

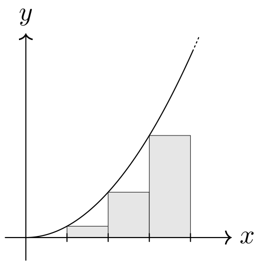
där m_i och M_i är f:s minsta respektive största värde i de olika delintervallen $[0, 1]$, $[1, 2]$, $[2, 3]$ och $[3, 4]$.

Eftersom $f(x) = x^2$ är strängt växande i $[0,4]$ antas m_i och M_i i delintervallens vänstra respektive högra ändpunkter. Vi får

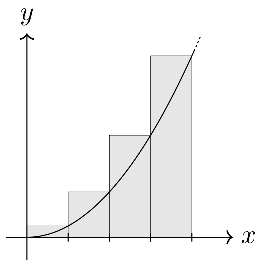
$$\begin{aligned} m_0 &= f(0) = 0 & m_2 &= f(2) = 4 \\ M_0 &= f(1) = 1 & M_2 &= f(3) = 9 \\ m_1 &= f(1) = 1 & m_3 &= f(3) = 9 \\ M_1 &= f(2) = 4 & M_3 &= f(4) = 16 \end{aligned}$$

och summorna blir

$$\begin{aligned} L(f,P_4) &= 0\cdot 1 + 1\cdot 1 + 4\cdot 1 + 9\cdot 1 = 14 \\ U(f,P_4) &= 1\cdot 1 + 4\cdot 1 + 9\cdot 1 + 16\cdot 1 = 30 \end{aligned}$$



$L(f,P_4)$



$U(f,P_4)$

5.3.10 Låt P_n vara partitionen av intervallet $[0,4]$ i n st delintervall med lika längd $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$. Beräkna $L(f,P_n)$ och $U(f,P_n)$ för $f(x) = e^x$.
Visa att

$$\lim_{n\to\infty} L(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} U(f,P_n).$$

Därmed är f integrerbar i $[0,3]$. Varför? Vad är $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,dx$?

Under- och översumman är

$$\begin{aligned} L(f,P_n) &= \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i, \\ U(f,P_n) &= \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i, \end{aligned}$$

där m_i och M_i är f:s minsta respektive största värde i de olika delintervallen. Eftersom $f(x) = e^x$ är en strängt växande funktion antas m_i och M_i i delintervallens vänstra respektive högra ändpunkter. Ändpunkterna är $x_i = 0 + i\frac{3-0}{n} = \frac{3i}{n}$ så vi får

$$\begin{aligned} m_i &= f(x_i) = \exp\Big(\frac{3i}{n}\Big), \\ M_i &= f(x_{i+1}) = \exp\Big((i+1)\,\frac{3}{n}\Big) = \exp\Big(\frac{3i}{n} + \frac{3}{n}\Big) = m_i\, e^{3/n}. \end{aligned}$$

Alltså är

$$\begin{aligned} L(f,P_n) &= \sum_{i=0}^{n-1} \exp\Big(\frac{3i}{n}\Big)\cdot\frac{3}{n} = \frac{3}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\big(e^{3/n}\big)^i \\ &= \{\text{geometrisk serie}\} = \frac{3}{n}\,\frac{1-(e^{3/n})^n}{1-e^{3/n}} = \frac{3}{n}\,\frac{1-e^3}{1-e^{3/n}}, \\ U(f,P_n) &= \sum_{i=0}^{n-1} m_i e^{3/n}\cdot\frac{3}{n} \\ &= e^{3/n}\sum_{i=0}^{n-1} m_i\,\frac{3}{n} = e^{3/n} L(f,P_n). \end{aligned}$$

Låter vi $n \to \infty$ fås att

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} L(f,P_n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n}\,\frac{1-e^3}{1-e^{3/n}} = \frac{3(1-e^3)}{\lim\limits_{n\to\infty} n(1-e^{3/n})} \\
&= \{\text{Maclaurinutveckling}\} = \frac{3(1-e^3)}{\lim\limits_{n\to\infty} n\big(1-(1+\frac{3}{n}+O(\frac{1}{n^2}))\big)} \\
&= \frac{3(1-e^3)}{\lim_{n\to\infty}\big(-3+O(\frac{1}{n})\big)} = e^3-1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} U(f,P_n) &= \lim_{n\to\infty} e^{3/n} L(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} e^{3/n}\cdot \lim_{n\to\infty} L(f,P_n) \\
&= 1\cdot(e^3-1) = e^3-1.
\end{aligned}$$

Alltså är

$$\lim_{n\to\infty} L(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} U(f,P_n) = e^3-1.$$

Om vi går tillbaka till definitionen av integral så ser vi att f är integrabel i $[0,3]$ om det finns exakt ett tal I så att

$$L(f,P) \le I \le U(f,P)$$

för alla partitioner P. I vårt fall låter vi

$$I = \lim_{n\to\infty} L(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} U(f,P_n).$$

$L(f,P) \le I$: Eftersom en översumma alltid är större än en undersumma, är

$$L(f,P) \le U(f,P_n).$$

Låter vi $n \to \infty$ fås

$$L(f,P) \le I.$$

$U(f,P) \ge I$: På samma sätt är

$$U(f,P) \ge L(f,P_n).$$

Låter vi $n \to \infty$ fås

$$U(f,P) \ge I.$$

I unik: Gapet mellan alla över- och undersummor måste alltid ligga i intervallet

$$[L(f,P_n), U(f,P_n)] \qquad \text{för alla } n.$$

Eftersom ändpunkterna i detta intervall konvergerar mot I, är gapet exakt en punkt I.

Vi får därmed att f är integrabel i $[0,3]$ och

$$\int_0^3 e^x\,dx = I = e^3-1.$$

5.3.12 Uttryck gränsvärdet

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n}\sqrt{\frac{i-1}{n}}$$

som en bestämd integral.

Dela upp intervallet $[0,1]$ i n st delintervall med lika längd $\frac{1}{n}$. I varje delintervall $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$ väljer vi en punkt $c_k = k/n$. Då är Riemannsumman av funktionen $f(x) = \sqrt{x}$ lika med

$$R(f,P_n,c) = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n} = \left\{\begin{matrix}\text{indexbyte}\\ i=k+1\\ k=i-1\end{matrix}\right\} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\sqrt{\frac{i-1}{n}}.$$

Eftersom partitionens finhet går mot noll är

$$\lim_{n\to\infty} R_n(f,P_n,c) = \int_0^1 \sqrt{x}\,dx,$$

d.v.s.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\sqrt{\frac{i-1}{n}} = \int_0^1 \sqrt{x}\,dx.$$