Lektion 3, Envariabelanalys den 23 september 1999

2.3.16 Bestäm derivatan av $y = \dfrac{4}{3-x}$.

Vi använder deriveringsregeln för kvoter,

$$y' = \frac{(4)' \cdot (3-x) - 4 \cdot (3-x)'}{(3-x)^2} = \frac{0 \cdot (3-x) - 4 \cdot (-1)}{(3-x)^2} = \frac{4}{(3-x)^2}.$$

2.3.22 Bestäm derivatan av $z = \dfrac{x-1}{x^{2/3}}$.

Vi har att

$$z = \frac{x-1}{x^{2/3}} = x^{1/3} - x^{-2/3}.$$

Detta uttryck kan deriveras termvis

$$z' = \tfrac{1}{3}x^{-2/3} - (-\tfrac{2}{3})x^{-5/3} = \tfrac{1}{3}x^{-2/3} + \tfrac{2}{3}x^{-5/3}.$$

2.3.40 Bestäm derivatan

$$\frac{d}{dx}\Big(\frac{f(x)}{x^2+f(x)}\Big)\Big|_{x=2}$$

givet att $f(2) = 2$ och $f'(2) = 3$.

Deriveringsregeln för kvoter ger att

$$\frac{d}{dx}\Big(\frac{f(x)}{x^2+f(x)}\Big) = \frac{f'(x)\big(x^2+f(x)\big) - f(x)\big(2x+f'(x)\big)}{\big(x^2+f(x)\big)^2} = \frac{x^2 f'(x) - 2xf(x)}{\big(x^2+f(x)\big)^2}.$$

Sätter vi $x = 2$ fås

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\Big(\frac{f(x)}{x^2+f(x)}\Big)\Big|_{x=2} &= \frac{2^2 \cdot f'(2) - 2 \cdot 2 \cdot f(2)}{\big(2^2+f(2)\big)^2} = \{f(2) = 2, f'(2) = 3\} \\ &= \frac{4 \cdot 3 - 4 \cdot 2}{(4+2)^2} = 1/9.\end{aligned}$$

2.4.2 Bestäm derivatan av $y = (1 - x/3)^{99}$.

Uttrycket som vi ska derivera har, grovt sett, utseendet

$$y = \big(\colorbox{lightgray}{}\big)^{99}.$$

”Någonting upphöjt till 99” är den yttre funktionen medan den gråfärgade delen utgör en inre funktionsdel.

När vi deriverar uttrycket med kedjeregeln, deriverar vi först den yttre funktionen som om den inre gråfärgade delen vore den variabel vi deriverar med avseende på, och sedan multiplicerar vi med derivatan av den inre funktionen,

$$\begin{aligned}y' &= 99\big(\colorbox{lightgray}{}\big)^{98} \cdot \big(\colorbox{lightgray}{}\big)' \\ &= 99\big(1 - x/3\big)^{98} \cdot \big(1 - x/3\big)' \\ &= 99\big(1 - x/3\big)^{98} \cdot (-1/3) = -33\big(1 - x/3\big)^{98}.\end{aligned}$$

2.4.4 Bestäm derivatan av $y = \sqrt{1 - 3x^2}$.

På den grövsta nivån består uttrycket av ”roten ur någonting”. Med kedjeregeln får vi

$$\begin{aligned}y' &= \frac{1/2}{\sqrt{\colorbox{lightgray}{}}} \cdot \big(\colorbox{lightgray}{}\big)' = \frac{1/2}{\sqrt{1-3x^2}} \cdot \big(1 - 3x^2\big)' \\ &= \frac{1/2}{\sqrt{1-3x^2}} \cdot (-6x) = \frac{-3x}{\sqrt{1-3x^2}}.\end{aligned}$$

2.4.11 Bestäm derivatan av $y = 4x + |4x - 1|$.

Uttryckets andra term består av en sammansättning av beloppsfunktionen och ett förstagradsuttryck

$$y = 4x + |\boxed{}|.$$

Vi deriverar med hjälp av kedjeregeln

$$y' = 4 + \operatorname{sgn}(\boxed{}) \cdot (\boxed{})' = 4 + \operatorname{sgn}(4x-1) \cdot 4.$$

Detta uttryck kan förenklas om vi noterar att $\operatorname{sgn}(4x-1) = +1$ om $4x - 1 > 0$ d.v.s. $x > 1/4$, och $\operatorname{sgn}(4x-1) = -1$ om $x < 1/4$. Svaret blir alltså

$$y' = \begin{cases} 8 & \text{om } x > 1/4, \\ 0 & \text{om } x < 1/4. \end{cases}$$

Anm. Derivatan existerar inte i punkten $x = 1/4$ eftersom vänsterderivatan är 0 medan högerderivatan är 8.

2.4.14 Bestäm derivatan av $f(x) = \left(1 + \sqrt{\dfrac{x-2}{3}}\right)^4$.

Den yttre funktionen i uttrycket är "någonting upphöjt till 4". Om vi använder kedjeregeln på denna nivå fås

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(1 + \sqrt{\frac{x-2}{3}}\right)^4 = 4\left(1 + \sqrt{\frac{x-2}{3}}\right)^3 \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{x-2}{3}}\right)'$$

Den inre funktionen består i sin tur av ett rotuttryck som vi använder kedjeregeln på

$$\begin{aligned} &= 4\left(1 + \sqrt{\frac{x-2}{3}}\right)^3 \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{x-2}{3}}\right)' \\ &= 4\left(1 + \sqrt{\frac{x-2}{3}}\right)^3 \cdot \left(0 + \frac{1/2}{\sqrt{\dfrac{x-2}{3}}} \cdot \left(\frac{x-2}{3}\right)'\right) \end{aligned}$$

Nu har vi nått ett uttryck som vi direkt kan derivera

$$= 4\left(1 + \sqrt{\frac{x-2}{3}}\right)^3 \cdot \frac{1/2}{\sqrt{\dfrac{x-2}{3}}} \cdot 1/3$$

Det återstår bara att förenkla uttrycket

$$= \frac{\frac{2}{3}\left(1 + \sqrt{\dfrac{x-2}{3}}\right)^3}{\sqrt{\dfrac{x-2}{3}}}.$$

2.4.16 Bestäm derivatan av $y = \dfrac{x^5\sqrt{3+x^6}}{(4+x^2)^3}$.

Uttrycket består av en kvot av två deluttryck. Om vi sätter

$$\begin{aligned} f(x) &= x^5\sqrt{3+x^6} \\ g(x) &= (4+x^2)^3 \end{aligned}$$

så är

$$y' = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

Vi behöver alltså räkna ut derivatan av täljaren $f(x)$ och nämnaren $g(x)$.

$f'(x)$: Täljaren består av en produkt av två funktioner

$$f(x) = x^5 \cdot \sqrt{3+x^6}.$$

Produktregeln ger att

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= (x^5)' \cdot \sqrt{3+x^6} + x^5 \cdot \bigl(\sqrt{3+x^6}\,\bigr)' \\
&= 5x^4\sqrt{3+x^6} + x^5\left(\frac{1/2}{\sqrt{3+x^6}} \cdot (3+x^6)'\right) \\
&= 5x^4\sqrt{3+x^6} + x^5\frac{3x^5}{\sqrt{3+x^6}} = \{\text{gemensam nämnare}\} \\
&= \frac{5x^4(3+x^6)+3x^{10}}{\sqrt{3+x^6}} = \frac{15x^4+8x^{10}}{\sqrt{3+x^6}}.
\end{aligned}
$$

$g'(x)$: Kedjeregeln ger att

$$g'(x) = 3(4+x^2)^2 \cdot (4+x^2)' = 3(4+x^2)^2 \cdot 2x = 6x(4+x^2)^2.$$

Sätter vi samman dessa resultat får vi

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{\dfrac{15x^4+8x^{10}}{\sqrt{3+x^6}} \cdot (4+x^2)^3 - x^5\sqrt{3+x^6} \cdot 6x(4+x^2)^2}{(4+x^2)^6} \\
&= \frac{(15x^4+8x^{10})(4+x^2)^3 - x^5(3+x^6) \cdot 6x(4+x^2)^2}{\sqrt{3+x^6}(4+x^2)^6} \\
&= \frac{2x^{12}+32x^{10}-6x^6+60x^4}{\sqrt{3+x^6}(4+x^2)^4}.
\end{aligned}
$$

Anm. En enklare lösning är att använda logaritmisk derivering (se avsnitt 3.3).

2.4.25 Uttryck derivatan av

$$y = \sqrt{3+2f(x)}$$

i termer av f och f'.

Kedjeregeln ger att

$$y' = \frac{1/2}{\sqrt{3+2f(x)}} \cdot \bigl(3+2f(x)\bigr)' = \frac{1/2}{\sqrt{3+2f(x)}} \cdot 2f'(x) = \frac{f'(x)}{\sqrt{3+2f(x)}}.$$

2.4.36 Finn ekvationen för tangentlinjen till kurvan

$$y = \sqrt{1+2x^2}$$

i punkten $x = 2$.

Tangentens lutning ges av

$$
\begin{aligned}
y'(2) &= \frac{d}{dx}\sqrt{1+2x^2}\,\bigg|_{x=2} = \frac{1/2}{\sqrt{1+2x^2}}(1+2x^2)'\,\bigg|_{x=2} \\
&= \frac{1/2}{\sqrt{1+2x^2}} \cdot 4x\,\bigg|_{x=2} = 4/3.
\end{aligned}
$$

Tangentlinjens ekvation är alltså

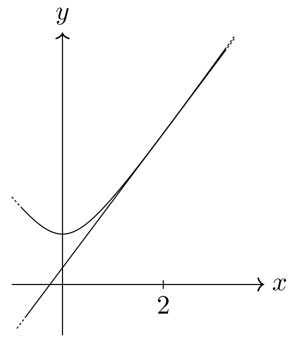
$$y = \tfrac{4}{3}x + m,$$

där m bestäms av att tangentlinjen går genom punkten $(2, \sqrt{1+2\cdot 2^2}\,) = (2,3)$,

$$3 = \tfrac{4}{3}\cdot 2 + m \quad\Leftrightarrow\quad m = 1/3.$$

Tangentlinjen har därmed ekvationen

$$y = \tfrac{4}{3}x + \tfrac{1}{3}.$$



2.4.40 Visa att derivatan av $y = (x-a)^m(x-b)^n$ försvinner i någon punkt mellan a och b om m och n är positiva heltal.

Produktregeln vid derivering ger

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= m(x-a)^{m-1} \cdot (x-b)^n + (x-a)^m \cdot n(x-b)^{n-1} \\
&= (x-a)^{m-1} \cdot (x-b)^{n-1} \cdot \bigl(m(x-b) + n(x-a)\bigr).
\end{aligned}
$$

Derivatan f' blir noll om någon av de tre faktorerna blir noll. De två första faktorerna blir noll endast i $x = a$ respektive $x = b$. Den tredje faktorn blir noll då

$$\begin{aligned} m(x-b) + n(x-a) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (m+n)x - (mb+na) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{mb+na}{m+n}. \end{aligned}$$

Om vi nu kan visa att $x = \frac{mb+na}{m+n}$ ligger i intervallet (a,b) så är vi klara.

Vad vi behöver visa är alltså att

$$a < \frac{mb+na}{m+n} < b.$$

Vi förlänger med $m+n$ (som är positiv) och får de ekvivalenta olikheterna

$$a(m+n) < mb + na < b(m+n). \qquad (*)$$

Betraktar vi nu den vänstra olikheten kan vi subtrahera termen an från båda led och få den ekvivalenta olikheten

$$am < bm.$$

Förkortning av faktorn m (positiv) ger oss $a < b$. Eftersom vi i varje steg har skrivit om olikheten till en ekvivalent olikhet är

$$a < \frac{mb+na}{m+n} \quad \text{ekvivalent med} \quad a < b.$$

Den högra olikheten är sann och därför är även den vänstra olikheten sann.

Den högra olikheten i $(*)$ kan visas vara ekvivalent med $a < b$ genom att addera bm och dela med n. Alltså är även den högra olikheten i $(*)$ sann.

Vi har därmed visat att x tillhör intervallet (a,b).

2.5.4 Bestäm derivatan av $\cos^2 x - \sin^2 x$.

Vi har att

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x.$$

Derivering ger

$$-2\sin 2x.$$

2.5.28 Bestäm derivatan av $\tan 3x \cdot \cot 3x$.

Vi har att

$$\begin{aligned} \tan 3x &= \frac{\sin 3x}{\cos 3x} \\ \cot 3x &= \frac{\cos 3x}{\sin 3x} \end{aligned}$$

varför

$$\tan 3x \cdot \cot 3x = 1$$

och derivatan är 0.

Anm. Uttrycket $\tan 3x \cdot \cot 3x$ är definierat överallt utom i punkter där $\tan 3x$ eller $\cot 3x$ är odefinierade. I detta fall visar det sig att undantagspunkterna är $\frac{n\pi}{6}$ för alla heltal n.

2.5.32 Bestäm derivatan av $\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$.

Vi använder kvotregeln

$$\begin{aligned} \frac{(\cos x)'(1+\sin x) - \cos x(1+\sin x)'}{(1+\sin x)^2} &= \frac{-\sin x(1+\sin x) - \cos x \cdot \cos x}{(1+\sin x)^2} \\ = \frac{-\sin x - (\sin^2 x + \cos^2 x)}{(1+\sin x)^2} &= -\frac{1+\sin x}{(1+\sin x)^2} = -\frac{1}{1+\sin x}. \end{aligned}$$

2.5.42 Finn ekvationer för de linjer som är tangent respektive normal till kurvan $y = \tan 2x$ i punkten $(0,0)$.

Vi börjar med tangentlinjen. Tangentens lutning i $x = 0$ ges av

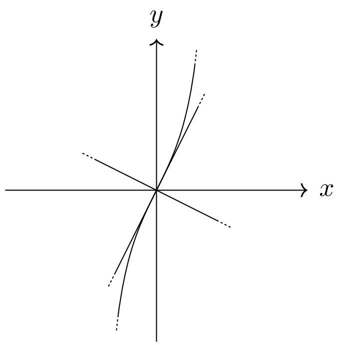
$$y'(0) = \frac{d}{dx}\tan 2x\Big|_{x=0} = (1+\tan^2 2x)\cdot 2\Big|_{x=0} = 2.$$

Eftersom tangentlinjen ska gå genom punkten $(0,0)$ ser vi direkt att dess ekvation är

$$y = 2x.$$

Normallinjen ska ha lutning $-1/y'(0) = -1/2$ och gå genom punkten $(0,0)$. Dess ekvation är därför

$$y = -1/2\,x.$$



2.5.58 Bestäm $\lim\limits_{x\to 0} \cos\Big(\dfrac{\pi - \pi\cos^2 x}{x^2}\Big)$.

Vi utnyttjar kontinuitet och det välkända gränsvärdet $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\cos\Big(\pi\frac{1-\cos^2 x}{x^2}\Big) &= \lim_{x\to 0}\cos\Big(\pi\frac{\sin^2 x}{x^2}\Big) = \{\cos \text{ är kontinuerlig}\}\\ &= \cos\Big(\lim_{x\to 0}\pi\Big(\frac{\sin x}{x}\Big)^2\Big) = \{x\mapsto x^2 \text{ är kontinuerlig}\}\\ &= \cos\Big(\pi\Big(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\Big)^2\Big) = \cos(\pi\cdot 1) = -1.\end{aligned}$$

2.8.2 Finn y', y'' och y''' då $y = x^2 - 1/x$.

Vi deriverar

$$\begin{aligned}y' &= 2x - (-\frac{1}{x^2}) = 2x + \frac{1}{x^2},\\ y'' &= 2 - \frac{2}{x^3},\\ y''' &= \frac{6}{x^4}.\end{aligned}$$

2.8.8 Finn y', y'' och y''' då $y = \dfrac{x-1}{x+2}$.

Vi skriver först om uttrycket till en form som bättre lämpar sig för upprepad derivering

$$y = \frac{x-1}{x+1} = \frac{x+1-2}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}.$$

Vi deriverar

$$\begin{aligned}y' &= -2\cdot\Big(-\frac{1}{(x+1)^2}\Big) = \frac{2}{(x+1)^2},\\ y'' &= -\frac{4}{(x+1)^3},\\ y''' &= +\frac{12}{(x+1)^4}.\end{aligned}$$

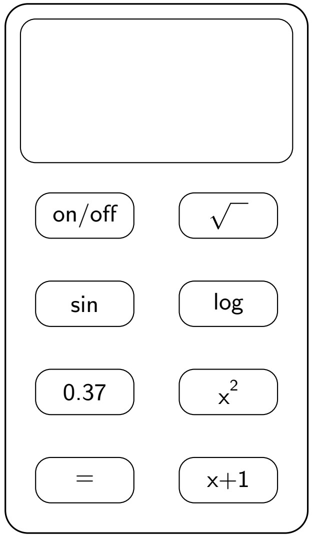
2.8.28 Om f och g är två gånger deriverbara, visa att

$$(fg)'' = f''g + 2f'g' + fg''.$$

Vi har att

$$\begin{aligned}(fg)' &= f'g + fg'\\ (fg)'' &= \big((fg)'\big)' = (f'g + fg')' = (f'g)' + (fg')'\\ &= (f''g + f'g') + (f'g' + fg'') = f''g + 2f'g' + fg''.\end{aligned}$$

Beräkna $\sin\left(\log \sqrt{1 + 0{,}37^2}\,\right)$ på miniräknaren nedan.



Vi trycker ner följande tangenter (från vänster till höger)

$$\boxed{0.37}\;\boxed{x^2}\;\boxed{x+1}\;\boxed{\sqrt{}}\;\boxed{\log}\;\boxed{\sin}.$$

Varje tangent är en funktion. Den tar ett tal (det i resultatfönstret), utför en räkneoperation och returnerar resultatet (även det i resultatfönstret).

När vi trycker ner tangenterna efter varandra tas resultatet från en tangent som ingångsvärde till nästa tangent. Matematiskt säger vi att vi sätter samman funktionerna. Räkningen vi gjorde ovan skulle i matematisk formalism bli

$$\boxed{\sin}\circ\boxed{\log}\circ\boxed{\sqrt{}}\circ\boxed{x+1}\circ\boxed{x^2}\Big(\boxed{0.37}\Big).$$

Notera att vi skriver allt baklänges. Argumentet (0,37) längst till höger och sedan funktionerna i tur och ordning om vi läser raden från höger till vänster.